Hußmann, Stephan; Bronner, Ines; Lübke, Julia; Thiel-Schneider, Alexandra

Mathematikunterricht im Ganztag. Lösungsansätze für einen diagnosegeleiteten und differenzierenden Unterricht

Münster; New York : Waxmann 2015, 45 S. - (Ganz In - Materialien für die Praxis)

Mit Ganztag mehr Zukunft.
Das neue Ganztagsgymnasium NRW

Mathematikunterricht im Ganztag
Lösungsansätze für einen diagnosegeleiteten und differenzierenden Unterricht

Stephan Hußmann, Ines Bronner, Julia Lübke, Alexandra Thiel-Schneider

WAXMANN

gainz | Mit Ganztag mehr Zukunft.
Das neue Ganztagsgymnasium NRW

Mathematikunterricht im Ganztag

Lösungsansätze für einen diagnosegeleiteten und differenzierenden Unterricht

Stephan Hußmann, Ines Bronner,
Julia Lübke, Alexandra Thiel-Schneider

Waxmann 2015
Münster • New York

STIFTUNG MERCATOR

IFS Institut für Schulentwicklungsforschung

UA RUHR

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Ganz In. Mit Ganztag mehr Zukunft.
Das neue Ganztagsgymnasium NRW

Praxishefte

herausgegeben von
Wilfried Bos und Heike Wendt

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Print-ISBN 978-3-8309-3316-8
E-Book-ISBN 978-3-8309-8316-3

Steinfurter Straße 555, 48159 Münster
www.waxmann.com
info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Inna Ponomareva, Jena
Umschlagfoto: Dan Race – Fotolia.com
Druck: mediaprint, Paderborn
Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706

Printed in Germany

Vorwort der Herausgeber

Die Einführung des Ganztags ist mit unterschiedlichen Herausforderungen und Anstrengungen verbunden. „*Ganz In. Mit Ganztag mehr Zukunft. Das neue Ganztagsgymnasium NRW*“ ist ein kooperatives Schulentwicklungsprojekt der Universitäten der Ruhrallianz, der Stiftung Mercator und des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen mit dem Ziel, 30 ausgewählte Gymnasien in Nordrhein-Westfalen (NRW) auf ihrem Weg zu gebundenen Ganztagsschulen in ihrer Schul- und Unterrichtsentwicklung durch Fortbildungsangebote und Netzwerkarbeit zu begleiten. Zentrale Zielstellungen sind dabei:

- durch die Verzahnung der unterschiedlichen Lerngelegenheiten eine allgemeine und fachliche Verbesserung der Schülerinnen- und Schülerleistungen zu erreichen;
- durch eine bedarfsorientierte Entwicklung von Ganztagsangeboten der auch an Gymnasien vorzufindenden Heterogenität von Schülerinnen und Schülern gerecht zu werden und durch die Ausgestaltung spezifischer Angebote verbesserte Möglichkeiten der individuellen Förderung zu schaffen, von denen insbesondere Schülerinnen und Schüler profitieren, die in ihrem häuslichen Umfeld in Bezug auf ihre individuellen Entwicklungspotenziale auf keine adäquate Unterstützung zurückgreifen können.

Eine besondere Stärke des Projektes liegt darin, unterschiedliche schulische Akteursgruppen bedarfsorientiert zu unterstützen: Schulleitungen, Ganztagskoordinatorinnen und -koordinatoren sowie ausgewählte Lehrkräfte der Projektschulen erhalten die Möglichkeit an – durch Schulentwicklungsberatung organisierten und moderierten – regionalen Netzwerktreffen teilzunehmen und hier im professionellen Diskurs mit Kolleginnen und Kollegen die eigene inhaltliche Konzeptgestaltung, organisatorisch-strukturelle sowie personelle Weiterentwicklungen zu reflektieren und zu optimieren. Mit den Angeboten der Fachdidaktiken der Fächer Deutsch, Mathematik, Englisch, Biologie, Chemie und Physik und der Lehr-/Lernpsychologie erhielten Fachlehrkräfte der Schulen zudem die Möglichkeit im Rahmen von bedarfsorientiert zugeschnittenen Fortbildungsveranstaltungen ihr Professionswissen zu stärken. Mit einer Schwerpunktsetzung auf Fachwissen und fachdidaktischem Wissen wurden speziell die Wissensbereiche fokussiert, die direkte Relevanz für die Entwicklung der Unterrichtsqualität haben.

Eine weitere besondere Stärke des Projektes liegt darin, dass im breiten Fächerkanon von drei Hauptfächern und den drei naturwissenschaftlichen Fächern für die vielfältigen Fragen nach optimierter Gestaltung von Lerngelegenheiten im Ganztag Lösungen erarbeitet werden. In thematischer Hinsicht werden insbesondere bei Aspekten der Entwicklung von Diagnose- und Förderinstrumenten, der Erarbeitung von für den Ganztag geeigneten Unterrichtskonzepten und für eine Verbindung der unterschiedlichen Lerngelegenheiten im Ganztag inhaltliche Schwerpunkte gesetzt.

Darüber hinaus stehen fächerübergreifend Konzepte zur Förderung des eigenständigen Arbeitens von Schülerinnen und Schülern sowie Möglichkeiten der Stärkung von Lern-, Sozial- und Personalkompetenzen im Fokus.

Die in dieser Reihe erscheinenden Praxisbände dokumentieren mit unterschiedlichen Schwerpunkten die vielfältigen Arbeitsergebnisse aller Projektbeteiligten und stellen erarbeitete Konzepte und Erfahrungen unter anderem in Form von Fortbildungs- und Unterrichtsmaterialien, Handlungsempfehlungen, Checklisten und Prozessbeschreibungen zur Verfügung. Damit sollen gewonnene Erkenntnisse und wirksame Konzepte für zukünftige Schulentwicklungsarbeit anderer Ganztagsschulen, insbesondere Gymnasien, nutzbar gemacht werden.

Gemeinsam ist allen Bänden dabei der Anspruch erfahrungsbasiert praxiserprobte Materialien auszuwählen und diese interdisziplinär mit Bezug zu aktuellen ganztagsspezifischen Diskursen und dem Forschungs- und Wissensstand der zentralen Referenzdisziplinen einzuordnen. Die Bände richten sich dabei jeweils an die unterschiedlichen durch das Projekt angesprochenen Akteure.

Wilfried Bos
Heike Wendt

Inhalt

1 Einleitung

Wodurch zeichnet sich guter Unterricht aus? Auf diese Frage, die Lehrerinnen und Lehrer in ihrer täglichen Unterrichtspraxis beschäftigt, gibt es unterschiedliche Antworten. Es existieren beispielsweise vielfältige Ansätze der pädagogischen Unterrichtsforschung bezüglich der grundsätzlichen Organisation von Unterricht und zentraler Bedingungen für das Lehren und Lernen, die hierzu wirksame Merkmale und allgemeine Gütekriterien liefert (vgl. etwa Meyer, 2004; Wellenreuther, 2010). Auch aus fachdidaktischer Perspektive, deren Fokus vor allem auf die Entwicklung und Erforschung des *fachspezifischen* Lehrens und Lernens ausgerichtet ist, gibt es viele unterschiedliche Bemühungen tragfähige und konsolidierte Antworten auf die eingangs gestellte Frage zu erhalten. Dabei werden verschiedene Strömungen und Grundpositionen vertreten, die ihrerseits einen maßgeblichen Einfluss auf die Produkte fachdidaktischer Forschung und Entwicklungsarbeit haben. Die in diesem Band enthaltenen fachdidaktischen Beiträge zur Unterrichtsentwicklung im Mathematikunterricht basieren vor allem auf einer sozialkonstruktivistischen Grundannahme von Lernen (Gerstenmaier & Mandl, 1995) und der Annahme, dass Wissen stets situative und kontextuelle Bezüge aufweist (Brown, Collins & Duguid, 1989; Greeno & Moore, 1993). Ein in diesem Sinne guter Mathematikunterricht wird von den Autoren vor allem als schüler- und stärkenorientiert verstanden und richtet sich an inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzen aus. Wichtige Merkmale eines Unterrichts, der auf individuelle Lernfortschritte der Schülerinnen und Schüler abzielt, sind zudem diagnosegeleitete und differenzierende Lernangebote (vgl. Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012; Hußmann & Prediger, 2007; Hußmann, Leuders & Prediger, 2007), die ein hohes Maß an kognitiver Aktivierung auf unterschiedlichen, individuellen Kompetenzstufen bereithalten. Dabei spielt einerseits die Eigenaktivität der Lernenden und die Übernahme von Verantwortung für den eigenen Lernprozess eine entscheidende Rolle (vgl. Hußmann, 2002; Leuders & Prediger, 2012; Winter, 1991). Andererseits sind dafür auch die inhaltliche Bedeutsamkeit der Lerngegenstände, als Basis für ein sinnstiftendes Lernen (vgl. Leuders, Hußmann, Barzel & Prediger, 2011), sowie die Orientierung an inhaltlichen Vorstellungen und Vorerfahrungen der Lernenden wesentliche Elemente (vgl. Prediger, 2009).

Im vorliegenden Heft werden einige Ansätze und Formate vorgestellt, die dabei helfen sollen die beschriebenen Anforderungen in verschiedenen Lernphasen im Mathematikunterricht zu etablieren. Drei für das Lernen von Mathematik typische Lernphasen (Barzel, Prediger, Leuders & Hußmann (2011) sprechen in diesem Zusammenhang von „Kernprozessen"), das *Entdecken und Erkunden* mathematischer Begriffe und Zusammenhänge, das *Systematisieren und Sichern* bereits erworbenen Wissens und das Üben und Vertiefen erlernter Inhalte (vgl. Barzel et al., 2011), bieten dabei in jedem Beitrag eine strukturelle Orientierung bezüglich der Einsatzmöglichkeiten der vorgestellten Formate.

In Kapitel 2 „Diagnose und individuelle Förderung" werden Anlässe und Möglichkeiten der kompetenzorientierten Diagnose im alltäglichen Schulunterricht sowie die Realisierung entsprechender Fördermaßnahmen vorgestellt. Insbesondere stehen hier die Präsentation und Vorschläge zur Entwicklung eines konkreten Unterrichtsmaterials („unsere Aufgabenwerkstatt") zur kompetenzgeleiteten Selbstdiagnose und anschließenden selbstdifferenzierenden Förderung in Form von passend konstruierten Übungsaufgaben im Zentrum.

Im Beitrag zum Thema „Lernaufgaben" (Kap. 3) werden wesentliche Kriterien für Aufgaben und Lernumgebungen vorgestellt, die individuelle Lernprozesse in Gang setzen und entsprechend der individuellen Fähigkeiten der Lernenden differenzieren. Für jede Lernphase werden Aufgabenbeispiele und weiterführende Anregungen gegeben. Die Entwicklung konkreten Unterrichtsmaterials wird schließlich für den Bereich *Entdecken und Erkunden* beispielhaft realisiert.

In Kapitel 4 „Nachhaltiges Sichern" geht es schließlich um effektive Möglichkeiten zur aktiven und nachhaltigen Systematisierung und Sicherung erworbenen mathematischen Wissens. Neben einer Systematisierung relevanter Faktoren und Entscheidungen, werden paradigmatische Umsetzungsbeispiele vorgestellt. Abschließend werden am Materialformat „Wissensspeicher" Möglichkeiten der selbstständigen Materialentwicklung aufgezeigt.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). *Mathewerkstatt 5. Handreichungen*. Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 71–74). Münster: wtm.

Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researchers*, *18*(1), 32–42.

Gerstenmaier, K. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik*, *41*(6), 867–888.

Greeno, J.G. & Moore, J.L. (1993). Situativity and Symbols: Response to Vera and Simon. *Cognitive Science*, *17*, 49–59.

Hußmann, S. (2002). *Mathematik entdecken und erforschen in der Sekundarstufe II – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen. Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(15), 1–8.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *49*(17), 2–8.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B. & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!" – Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53*(37), 2–9.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren" – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–67). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz Verlag.

Wellenreuther, M. (2010). Lehren und Lernen – aber wie? Empirisch-experimentelle Forschungen zum Lehren und Lernen im Unterricht. In J. Bennack, A. Kaiser, R. Winkel (Hrsg.), *Grundlagen der Schulpädagogik* (Band 50). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (2., verb. Aufl.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

2 Diagnose und individuelle Förderung

Diagnostizieren und Fördern gehören zu den zentralen Kompetenzen im täglichen Unterricht. Vor dem Hintergrund der großen Heterogenität der Schülerschaft (Baumert et al., 2001) haben die Leitprinzipien der Diagnose und individuellen Förderung (DiF) in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen (vgl. u.a. Becker et al., 2006; Helmke, Hosenfeld & Schrader, 2003; Helmke, 2009; Prediger & Selter, 2008; Hußmann & Prediger, 2007). Lehr-/Lernprozesse können nur dann effektiv und nachhaltig gestaltet werden, wenn sie an individuelle Lernstände der Schülerinnen und Schüler anknüpfen und diese adaptiv weiterentwickeln (Helmke, 2009). Dies gilt gleichermaßen für lernschwache wie für lernstarke Schülerinnen und Schüler.

> „Eine zutreffende Diagnose (…) ist eine wichtige, wenn nicht gar notwendige Voraussetzung für die Auswahl geeigneter Maßnahmen und die Anpassung des erzieherischen Handelns an die jeweiligen Adressaten.“ (Schrader, 2006, S. 95)

Schülerleistungen, -vorstellungen und -kompetenzen möglichst sensibel und vielschichtig zu verstehen ist eine spezifische Kompetenz, auf deren Basis der eigene Unterricht aufbauen kann (vgl. Hußmann, Leuders & Prediger, 2007). Zu einer guten Unterrichtskonzeption gehören somit auch geeignete Diagnoseaufgaben. Solche Aufgaben, die sich zur Diagnose eignen, sollten sich auf bestimmte, genau ausgewählte Kompetenzaspekte konzentrieren (vgl. ebd.), denn eine Überlagerung verschiedener Aspekte, z.B. durch eine Fokussierung auf mehrere Kompetenzen, kann eine zielgerichtete Überprüfung einer konkreten Fähig- oder Fertigkeit erschweren.

Diagnose spielt nicht nur im Hinblick auf die Bewertung der Schülerleistungen eine Rolle, sondern auch während des Unterrichtsgeschehens werden immer wieder diagnostische Urteile gefällt, die von informellen Urteilen über mündliche und schriftliche Rückmeldungen und Beratungsgespräche bis hin zum Einsatz konkreter diagnostischer Verfahren reichen (Helmke et al., 2003). Gerade in den Sekundarstufen ist die Diagnose jedoch nicht selten auf Klassenarbeiten beschränkt, wobei viele dieser Arbeiten den Schwerpunkt auf technische Fertigkeiten legen (u.a. Prediger & Selter, 2008, Hußmann, 2007). Die Bedeutung der Erfassung der Lernausgangslange und des Lernprozesses der Schülerinnen und Schüler ist in den letzten Jahren jedoch vielfach bestätigt worden (Prediger & Selter, 2008; Hußmann et al., 2007). Die sich an der Forderung nach Kompetenzorientierung ausrichtende stärkenorientierte Diagnostik, die sich von einer ausschließlichen Erfassung und Beurteilung von Defiziten abgrenzt, setzt daher an den Lernausgangslagen von Schülerinnen und Schülern an, also daran, was die Kinder und Jugendlichen schon können, bevor in eine neue Thematik im Unterricht eingeführt wird.

Wichtig für ein breit angelegtes Verständnis von Diagnose ist die Differenzierung nach dem Zweck von diagnostischen Urteilen. Zwei häufig erwähnte Ausrichtungen von Diagnostik sind die *Selektionsdiagnostik* und die *Förderdiagnostik* (z.B. Schrader, 2001). Während die Selektionsdiagnostik zum Ziel hat, Schülerinnen und Schülern ihren Leistungen entsprechend Qualifikationen und Plätze im Bildungssystem zuzuordnen, liegt das Ziel der Förderdiagnostik darin, Begabungen oder Förderungsbereiche zu identifizieren (Horstkemper, 2004; Helmke, 2009; Ingenkamp, 2005; Schrader, 1997, 2001; Phye, 1997). Gerade für eine adaptive, individuelle Förderung der Schülerinnen und Schüler ist das Wissen um typische mathematische Grundvorstellungen und häufig auftauchende Fehlermuster eine unabdingbare Voraussetzung für gut konzeptionierte Fördermaßnahmen. Eine gezielte individuelle Förderung lässt sich jedoch nicht unmittelbar aus den Diagnosen ableiten, sondern bedarf einer Absicherung durch entsprechende theoretische, fachliche und fachdidaktische Konzepte (Moser Opitz, 2010). Eine diagnostische Kompetenz und eine Handlungskompetenz im Bereich der individuellen Förderung zeigen sich somit als starke Einflussfaktoren auf erfolgreiches Lernen im Unterricht (Helmke, 2009; Weinert, 2000; Baumert & Kunter, 2006).

2.1 Bedeutung im Ganztag

Der Ganztag bietet gerade im Bereich der Diagnose und Förderung besondere Rahmenbedingungen, da die Schülerinnen und Schüler im Gegensatz zu einer Halbtagsschule mehr Zeit in ihrem schulischen Umfeld verbringen. Hier liegt eine große Chance für die Lehrkräfte, diese durch den Ganztag gewonnene Zeit für eine gezielte Diagnose und eine individuelle Förderung eines jeden Lernenden zu nutzen.

Da die Ganztagskonzeptionen sowohl von Seiten des Ministeriums – es gibt beispielsweise die Unterscheidung in offenen und gebunden Ganztag mit jeweils verschiedenen zeitlichen Rahmungen für die Schülerinnen und Schüler – als auch von Seiten der einzelnen Schulen unterschiedlich ausgerichtet sein kann, müssen auch die Diagnose- und Förderzeiten individuell für jede Klasse bzw. jeden Schüler angepasst werden. In vielen Ganztagskonzepten gibt es Förderbereiche, die häufig im Nachmittagsbereich liegen und die durch Lehrpersonen oder weiteres pädagogisches Personal betreut werden. Die Schülerinnen und Schüler erhalten in diesen Lernzeiten unter anderem die Möglichkeit, fachbezogen zu üben. Da man in diesen Bereichen des Schultags nicht davon ausgehen kann, dass eine Fachlehrkraft das jeweilige fachliche Lernen der Kinder betreut, bedarf es einer besonderen Konzeption von Material, so dass auch in diesen Stunden effektiv und eigenständig gearbeitet werden kann. Ein Material, das in solchen Lernzeiten, wie sie in vielen Ganztagskonzeptionen zu finden sind, sinnvoll genutzt werden kann, muss somit auch die Selbstverantwortung und Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler in den Blick nehmen.

Die längere Zeit, die die Schülerinnen und Schüler in der Schule verbringen, verpflichtet zu einer umfassenden und zugleich systematischeren und genaueren Analyse der Schülerkompetenzen. Da die Lernenden die sonst zu Hause aufgebrachte Zeit zum Üben bestimmter Fähig- und Fertigkeiten im Rahmen von Hausaufgaben nun zum großen Teil im schulischen Umfeld erleben, ist eine transparente Integration gerade dieser Übezeiten in den Unterricht eine zentrale Herausforderung für die Gestaltung des Fachunterrichts. Eine nachhaltige Förderung sollte daher auch immer einen gewissen Anteil an übenden Aufgaben beinhalten (vgl. u.a. Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012). Das im Folgenden dargestellte Unterrichtsmaterial liefert einen Beitrag zur Umsetzung dieser (Heraus-)Forderung, indem es mit seinen auf spezifische Kompetenzen ausgerichteten Diagnoseaufgaben eine Basis für die Konzeption geeigneter Übungsaufgaben liefert und Förderaufgaben vor dem Hintergrund fachdidaktischer Forschung bereitstellt.

2.2 Vorstellung eines ganztagsgeeigneten Unterrichtmaterials

Eine Möglichkeit, mathematische Diagnose und Förderung in fachfremd begleitete Lernzeiten zu integrieren, besteht darin, diese zu großen Teilen in die Hand der Schülerinnen und Schüler zu geben. Die Materialidee der *Aufgabenwerkstatt* setzt auf die Eigenständigkeit der Lernenden und kann somit sowohl im Regelunterricht als auch in anderen Bereichen des schulischen Lernens eingesetzt werden. Sie stellt einen exemplarischen, aber für den Ganztag gut geeigneten Zugang zu Bereich der Diagnose und Förderung dar und soll in diesem Beitrag ausführlich beschrieben werden.

Die grundlegende inhaltliche Struktur ist an den strukturellen und inhaltlichen Ideen der *Rechenbausteine* aus dem Lehrwerk *mathewerkstatt* (Hußmann et al., 2011a/b) orientiert und greift dabei Aspekte der Sinnstiftung (Hußmann, Liegmann, Racherbäumer &

Walzebug, 2009) und des konsequenten Aufbaus von inhaltlichen Vorstellungen hin zum kalkülhaften Umgehen auf (Prediger, 2009). Gerade das inhaltliche Verständnis mathematischer Begriffe und Tätigkeiten ist besonders wichtig für ein nachhaltiges Mathematiklernen und muss eine Basis für algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten sein. Ebenso wie das Material der ‚Rechenbausteine' (Hußmann et al., 2011a/b) „ein Konzept für die Sicherung und zum Wiederaufbereiten arithmetischer Basiskompetenzen zu Beginn der Klasse 5" (Prediger, Hußmann, Leuders & Barzel, 2011, S. 1) darstellt, eignet sich das Material der Aufgabenwerkstatt vor allem für Wiederholungsphasen. Viele Schwierigkeiten im Verstehen von Mathematik lassen sich auf falsch oder nur oberflächlich verstandene mathematische Begriffe und Zusammenhänge zurückführen, so dass die Wiederholung eigentlich bereits gelehrten und gelernten Stoffes, gerade im Ganztag, eine konkrete Rolle in der Planung und Umsetzung von Mathematikunterricht spielen kann.

Zentrale didaktische Ziele der *Aufgabenwerkstatt* sind die fokussierte Diagnose konkreter Kompetenzen in ausgewählten Inhaltsbereichen und eine daran anschließende individuelle Förderung. Das Material beginnt dazu mit einem Selbsttest (*Diagnose*), mit dessen Hilfe die Schülerinnen und Schüler ihr Können in dem jeweiligen Inhaltsbereich erkunden können. Dieser Selbsttest mündet dann in eine eigenständige Auswertungsphase (*Auswertung*), in der individuelle Aufgaben für die sich anschließende Übungsphase (*Üben*) bereitgestellt werden. Durch vorstrukturierte Auswertungsseiten erhalten die Schülerinnen und Schüler Unterstützung im Ordnen ihrer Bearbeitungen und werden entsprechend ihrem Wiedererarbeitungs- und Trainingsbedarf zu übenden Aufgaben geführt, mit denen sie die Kompetenzen wiederaufbereiten können. Zu diesen Aufgaben stehen den Lernenden dann noch schriftliche Lösungen zur Verfügung, mit der sie die eigenen Bearbeitungen abgleichen und reflektieren können. Die entsprechenden Kompetenzen, die im Selbsttest diagnostiziert, dann ausgewertet und vertieft werden, sind formuliert auf Basis der inhaltlichen Kompetenzen des Kernlehrplans Mathematik des Landes NRW. Jeder dort zu findende Bereich ist somit noch einmal in konkret formulierte Kompetenzen aufzuschlüsseln, die auch für die Schülerinnen und Schüler verständlich sind. Für eine Aufgabenwerkstatt zum Bereich „Ganze Zahlen verstehen", lassen sich z.B. folgende Kompetenzen unterscheiden:

- Ich kann beschreiben, was das Minus vor einer Zahl bedeutet.
- Ich kann ganze Zahlen der Größe nach ordnen.
- Ich kann ganze Zahlen auf einer Zahlengerade anordnen.
- Ich kann den Abstand zwischen zwei ganzen Zahlen bestimmen.
- Ich kann ganze Zahlen addieren und subtrahieren.
- Ich kann Situationen in Rechenaufgaben übersetzen und zu Aufgaben passende Situationen finden.
- Ich kann ganze Zahlen multiplizieren und dividieren.
- Ich kann alle Rechenoperationen an der Zahlengeraden darstellen.

Diese Kompetenzen decken den Bereich dessen, was die Schülerinnen und Schüler bezüglich ihrer Zahl-, Darstellungs- Ordnungs- und Operationsvorstellungen bei der Erweiterung des Zahlbereiches hin zu den ganzen Zahlen verstehen bzw. können müssen, in großen Teilen ab. Sie sind im Bereich des Selbsttest, also der Diagnose, als Fragen formuliert (z.B. „Kann ich beschreiben, was das Minus vor einer Zahl bedeutet?") und stehen für die Schülerinnen und Schüler transparent direkt über der konkreten Aufgabenstellung. Dieses ermöglicht den Lernenden eine explizite Orientierung auf spezifische Lernziele, die ein wesentliches Strukturelement für eigenständiges Arbeiten darstellt (Fernholz & Prediger, 2007).

Abbildung 1: Ausschnitte aus den Diagnoseaufgaben zum Bereich „Ganze Zahlen verstehen“

1 Kann ich beschreiben, was das Minus vor einer Zahl bedeutet?

a) Erkläre, was die beiden meinen. Welche Bedeutung hat das Minus?

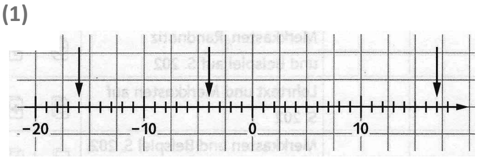
____

____

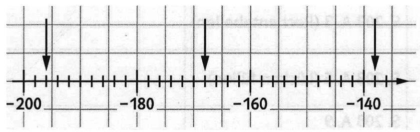
____

b) Beschrifte die einzelnen Pfeile mit den passenden Zahlen.

(1)



(2)



Im ordnenden Teil der Aufgabenwerkstatt können die Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitung aus dem Selbsttest mit vorgeschlagenen Lösungen und Lösungswegen vergleichen und ankreuzen, welche Lösung bzw. welches Vorgehen dem eigenen entspricht. Die für die Schülerinnen und Schüler zur Wahl stehenden Lösungen beinhalten neben einer oder mehrerer adäquater Lösungen auch Antworten, die typische, empirisch belegte Fehlvorstellungen und Fehlermuster enthalten. Diese sind in schülergerechten Formulierungen verbalisiert, so dass den Schülerinnen und Schülern eine konkrete und vor allem selbstständige Einordnung ihrer eigenen Bearbeitung vor dem Hintergrund der fachlichen Anforderungen ermöglicht wird. Die aus dem diagnostischen Teil als Frage formulierte Kompetenz wird hier als Einschätzung formuliert (z.B. „So gut kann ich beschreiben, was das Minus vor einer Zahl bedeutet“), so dass für die Lernenden immer transparent bleibt, mit welcher Kompetenz sie sich gerade beschäftigen. Um für die Lernenden weiterhin deutlich zu machen, welche der in der Auswertung aufgezeigten Lösungen mathematisch tragfähig bzw. nicht tragfähig ist, stehen die fachlich richtigen Lösungen am Anfang des ordnenden Teils und sind farblich unterlegt, so dass sie sich optisch abgrenzen und auch für die Schülerinnen und Schüler direkt als richtige Lösungen zu erkennen sind.

Das folgende Beispiel einer Auswertungsseite stammt aus den Rechenbausteinen der Mathewerkstatt und greift die Kompetenz, zwei natürliche Zahlen schriftlich addieren zu können, auf. Die zugehörige Aufgabe aus dem Selbsttest besteht darin, die Zahlen der Rechenaufgabe 450232 + 4160 richtig untereinander zu schreiben und dann die Rechenaufgabe schriftlich zu lösen.

Haben die Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitungen und Lösungen mit den Vorgaben aus dem ordnenden Auswertungsteil abgeglichen und sich entsprechend eingeschätzt, werden sie zu den Wiedererarbeitungs- und Übungsaufgaben weitergeleitet. Dieser vertiefende Bereich einer Aufgabenwerkstatt liefert den Schülerinnen und Schülern adaptive erarbeitende, sichernde oder vertiefende Aufgaben (z.B. „Ich übe, zwei Zahlen schriftlich zu addieren.“). Wurde eine Diagnoseaufgabe mathematisch passend gelöst, so wird der Lernende durch das Ankreuzen der farblich unterlegten Lösung zu vertiefenden Aufgabenstellungen geleitet, die es ermöglichen, inhaltlich noch tiefer in die benannte Kompetenz vorzudringen. Die Schülerinnen und Schüler werden durch die neuen Aufgaben nicht zu einem anderen thematischen Bereich oder einer anderen Kompetenz weiterge-

1 So gut kann ich zwei Zahlen schriftlich addieren

a)

	Wie habe ich die Aufgabe gelöst?		*Wie geht es weiter?*
☐	4 5 0 2 3 2 + 4 1 6 0 4 5 4 3 9 2	✓	► Nr. 11 (S. 25)
☐	4 5 0 2 3 2 + 4 1 6 0 8 6 6 2 3 2		► Nr. 1 (S. 21), Nr. 6 (S. 23)
☐	Ich habe ein anderes Ergebnis.		► Nr. 2 (S. 21), Nr. 7 (S. 23)
☐	Ich weiß nicht mehr, wie man zwei Zahlen schriftlich addiert.		► Nr. 1, 2 (S. 21)

Abbildung 2: Beispiel einer Auswertungsseite aus den Rechenbausteinen (Hußmann et al., 2011a, S. 15)

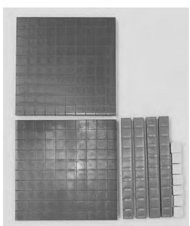
leitet, sondern erhalten die Möglichkeit, diesen Kompetenzbereich eingehender zu erarbeiten. Somit kann, falls die Aufgabenwerkstatt gezielt im Unterricht eingesetzt wird, ein gemeinsames ‚Weitergehen' im Stoff gewährleistet werden. Die Aufgaben, zu denen die Schülerinnen und Schüler weitergeleitet werden, die eine Diagnoseaufgabe mathematisch nicht tragfähig oder nur teilweise gelöst haben, beinhalten Bearbeitungen, die genau auf die fachliche Teilkompetenz abzielen, die noch unzureichend ausgebildet ist oder im Rahmen der diagnostischen Aufgabe nicht aktiviert werden konnte. In Bezug auf das obige Beispiel würden Lernende, die die Aufgabe entsprechend der zweiten Zeile gelöst haben, und somit noch Schwierigkeiten mit den Stellenwerten natürlicher Zahlen bei der schriftlichen Addition haben, zu Erarbeitungsaufgaben weitergeleitet, die mithilfe geeigneter Materialien und spezifischer Fragestellungen, die Stellenwerte natürlicher Zahlen thematisieren.

D1 Ich übe, zwei Zahlen schriftlich zu addieren

1 Wie kann man Additionsaufgaben mit Material legen und lösen?

a) Ole möchte die Additionsaufgabe 45 + 52 mit Einerwürfeln und Zehnerstangen lösen. Er zeichnet auch ein Bild dazu.

Wie erhält Ole durch Zusammenlegen der Zehnerstangen und Würfel das Ergebnis?



b) Für Hunderter kann man auch Hunderterplatten legen. Welche Zahl wurde am Rand gelegt?

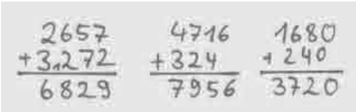
c) Zeichne für die folgenden Additionsaufgaben jeweils ein Bild wie Ole in a). Bestimme jeweils das Ergebnis.
(1) 345 + 543 (2) 345 + 122 + 432

Abbildung 3: Beispiele vertiefender Aufgaben aus den Rechenbausteinen (Hußmann et al., 2011b, S. 21)

Abbildung 4:
Beispiele vertiefender Aufgaben aus den Rechenbausteinen (Hußmann et al., 2011b, S. 23)

6 Ordentlich untereinander schreiben

Pia hat die folgenden Additionsaufgaben leider falsch gelöst:



a) Kannst du Pias Fehler finden?

b) Löse die Additionsaufgaben richtig.

c) Was meint Ole mit seinem Kommentar: „Pia sollte ordentlicher arbeiten.“?
Welchen Tipp würdest du Pia geben?
Wenn du nicht sicher bist, bearbeite Aufgabe 2 auf S. 21.

d) Worauf muss man achten, um Fehler zu vermeiden?
Erstelle in deinem Heft eine Liste.

Haben die Schülerinnen und Schüler die übenden Aufgaben bearbeitet, erhalten Sie entweder durch die Lehrkraft oder durch zur Verfügung stehende Lösungen zu diesen Aufgaben, eine Rückmeldung zu ihren Bearbeitungen. Das Bereitstellen solcher Musterlösungen ist vor allem dann sinnvoll, wenn die Lernenden vollkommen selbstständig mit dem Material arbeiten sollen. Die Lösungen müssen für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar aufgeschrieben sein und, je nach Aufgabe, auch mehrere Lösungswege berücksichtigen.

2.3 Einsatz des Materials im Unterricht

Auch wenn das Material der Aufgabenwerkstatt in seiner Individualisierung in erster Linie auf ein selbstständiges und eigenverantwortliches Arbeiten der Schülerinnen und Schüler setzt, sollte es nicht ohne gemeinsame Einführung kommentarlos an die Lernenden ausgegeben werden. Da ein für den gewinnbringenden Umgang mit dem Material erforderliches Arbeitsverhalten bei vielen Schülerinnen und Schüler erst aufgebaut werden muss, sollen im Folgenden einige Anregungen gegeben werden, wie die Arbeit mit der Aufgabenwerkstatt sowohl im Regelunterricht als auch in Lernzeiten gelingen kann.

Erste Kompetenz gemeinsam auf Folie bearbeiten

Es lohnt sich, die erste Kompetenz einer Aufgabenwerkstatt in ihrer Drei- bzw. Viergliedrigkeit gemeinsam mit allen Schülerinnen und Schülern im Plenum zu bearbeiten. Dabei kann natürlich nicht das eigentliche Ziel der Diagnose der Kompetenz eines einzelnen Schülers erreicht werden. Das gemeinsame erste Bearbeiten dient dem Kennenlernen und Erläutern der Struktur des gesamten Materials. Die Lehrkraft sollte den Lernenden daher offen kommunizieren, was die jeweiligen Ziele der einzelnen Bereiche der Aufgabenwerkstatt sind und wie selbstständig diese Bereichen bearbeitet werden sollen. Wichtig dabei ist immer, den Lernenden transparent zu machen, warum das Einhalten bestimmter Regeln im Umgang mit dem Material wichtig ist.

Für die gemeinsame Bearbeitung der ersten Kompetenz bietet es sich an, für die entsprechenden Diagnose-, Auswertungs- und Übungsseiten (und ggf. die Lösungen dazu) Folien anzufertigen und so sichtbar für alle den Aufbau des Materials zu erläutern. Den Lernenden wird dadurch der Ablauf bei der Arbeit mit diesem Material vertrauter und

Nachfragen können direkt für alle beantwortet werden. Hierbei ist es auch sinnvoll, verschiedene Schwierigkeiten oder Hürden, die während der Bearbeitung entstehen könnten, direkt zu thematisieren. Da einige Schülerinnen und Schüler z.B. dazu neigen, nach Betrachtung der passenden Lösung auf der Auswertungsseite, die eigene Bearbeitung im Selbsttest noch einmal zu korrigieren, um sich als „richtig gelöst“ einordnen zu können, lohnt sich, diesen „Selbstbetrug“ in der Einführungsphase des Materials konkret zu thematisieren. Erfahren die Lernenden dadurch, dass sie durch eine solche falsche Auswertung zu inhaltlich vertiefenderen Aufgaben geführt werden, die zum jetzigen Zeitpunkt für sie nicht lösbar sind, kann die Verantwortung für den eigenen Lernprozess gestärkt werden.

Keine Partnerarbeit beim Selbsttest

Da der Selbsttest dazu dient, möglichst genauen Aufschluss über den eigenen Lernstand zu erlangen, sollte den Lernenden die Grundidee und die Struktur der Aufgabenwerkstatt sorgfältig erklärt und immer wieder reflektiert werden (vgl. Prediger et al., 2011, S. 6). Ohne dieses Wissen könnten Schülerinnen und Schüler das Erkunden der Kompetenzen als Lerngelegenheit nutzen und sich bspw. mit dem Tischnachbarn über mögliche Bearbeitungen austauschen. Um jedoch ein realistisches Bild des eigenen Lernstandes zu erhalten und damit einhergehend auch bedarfsgerecht gefördert zu werden, ist es zwingend erforderlich, dass jede/r Lernende die Aufgaben im Selbsttest für sich allein bearbeitet (vgl. Prediger et al., 2011, S. 6).

Austausch der Bearbeitungen als Kontrolle

Die Einschätzung der eigenen Bearbeitung der Diagnoseaufgaben ist für viele Schülerinnen und Schüler eine besondere Herausforderung. Auch bei gut strukturierten und fachlich lange durchdachten Wahlmöglichkeiten auf den Auswertungsseiten entstehen bei den Lernenden Fragen wie „Ist das, was ich geschrieben habe, wirklich dasselbe, wie hier zur Auswahl steht?“ oder „Kann es sein, dass keine Auswahl auf meine Bearbeitung zutrifft?“. Hier bietet es sich an, den Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit zu geben, nach dem eigenständigen Bearbeiten des Selbsttests und der Auswertung, paarweise die Bearbeitungen auszutauschen. So erhält jeder Lernende eine individuelle Rückmeldung zu seiner Einordnung. Wichtig hierbei ist, den Lernenden vorab deutlich zu machen, dass es nicht um eine Rückmeldung oder sogar Verbesserung der Bearbeitungen aus dem Selbsttest geht, sondern ganz fokussiert nur die Einordnung dieser Bearbeitung im ordnenden Teil besprochen werden soll.

Aufgabenwerkstatt parallel zu neuen mathematischen Inhalten nutzen

Da die Aufgabenwerkstatt strukturell sehr ähnlich zu den Rechenbausteinen ist und sich in Begleitstudien zum Einsatz dieses Materials herausgestellt hat, dass

> „die Individualisierung der Arbeit an den Rechenbausteinen für die Kinder durchaus anstrengend ist, hat es sich besonders bewährt, die Rechenbausteine zeitlich parallel zur Arbeit an anderen Kapiteln einzusetzen, zum Beispiel zwei Stunden in der Woche im Rahmen einer ‚Arbeitsplan-Spur‘, eines ‚selbstorganisierten Lernen‘ oder einer ähnlichen Struktur, wie sie an vielen Schulen bereits existiert. Auch das gelegentliche Aufgreifen von Erarbeitungsaufgaben im Klassengespräch kann die Vereinzelung verhindern.“ (Prediger et al., 2011, S. 7)

Für Ganztagsschulen bieten sich hier, je nach Ganztagskonzept, gute Gelegenheiten, die Aufgabenwerkstätten sowohl im Regelunterricht als auch in Lernzeiten oder ähnlichen Konzepten zu integrieren. Da sich die Aufgabenwerkstatt, durch ihre Konzeption, zentral für die Wiederholung bereits gelehrter Inhalte eignet, ist es nicht ratsam, den gesamten

Unterricht mithilfe dieser Unterrichtsform zu organisieren. Gerade in der Neuerarbeitung mathematischer Inhalte hat ein individualisierter, diagnosegeleiteter Unterricht seine Grenzen (vgl. Prediger et al., 2011, S. 7).

Gemeinsame Bearbeitungsziele festlegen und Material reflektieren

Je nach Einsatz des Materials ist es für die Schülerinnen und Schüler eine Hilfe, wenn es einen festgelegten Zeitpunkt gibt, bis zu dem bestimmte Kompetenzen bearbeitet sein müssen. Dieses bietet sich vor allem in der ersten Zeit der Arbeit mit dem Material an und ist sowohl wichtig, wenn die Aufgabewerkstatt im Regelunterricht als auch in den Lernzeiten oder kombiniert eingesetzt wird. Aufgrund der verschiedenen vertiefenden Aufgaben (Erarbeitungsaufgaben, sichernde Aufgaben, Erweiterungsaufgaben) und der unterschiedlichen Arbeits- und Lerntempi sollten die Schülerinnen und Schüler jedoch immer ausreichend Zeit zur Bearbeitung zur Verfügung haben. Die flexiblere Gestaltung der Lernzeiten im Ganztag kann hier also dazu beitragen, verschiedene Zeitfenster für die Bearbeitung zur Verfügung zu stellen.

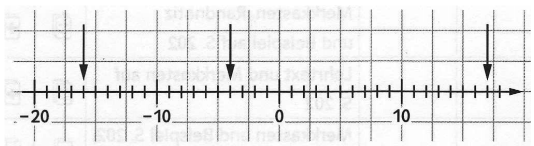
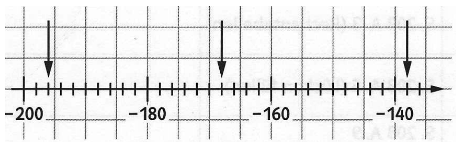
Ebenso sinnvoll wie das Festlegen konkreter Bearbeitungsziele ist auch eine erste Reflexion des Einsatzes nach etwa 1–3 Wochen, in der die Lernenden ihre Erfahrungen mit dem Material äußern können. Durch die Aussagen der Lernenden kann sowohl eine Einschätzung über den allgemeinen Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erfolgen als auch Erfahrungen bezüglich der Fähigkeiten im selbstständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler gesammelt werden.

2.4 Entwicklung einer eigenen Aufgabenwerkstatt

Nach der Einführung und Einordnung des Aufgabenformats in den vorigen Abschnitten, sollen nun Möglichkeiten und Anleitungen für die Entwicklung themenspezifischer Aufgaben für eine individualisierte, eigenverantwortliche und kompetenzorientierte Wiederholung mathematischer Inhalte vorgestellt werden. Zusätzlich zu den schon gezeigten Beispielen ausgewählter Erkunden-, Ordnen- und Vertiefenseiten wird im Folgenden aufgezeigt, welche inhaltlichen Schritte zur Erarbeitung eines solchen Materials notwendig sind.

<table>
<tr><th>Allgemeine Entwicklungsschritte</th><th>Exemplarisch am Beispiel einer Kompetenz im Bereich der ganzen Zahlen</th></tr>
<tr><td>Themengebiet aus dem Lehrplan auswählen
– Welche fachbezogene Kompetenz?
– Welche Klassenstufe?
– Welche Kompetenzerwartungen gibt es im Lehrplan?</td><td>Arithmetik und Algebra – Mit Zahlen und Symbolen umgehen

Ende der Klassenstufe 6
Schülerinnen und Schüler
… stellen ganze Zahlen auf verschiedene Weise dar (Zahlengerade, Zifferndarstellung, Stellenwerttafel, Wortform)
… ordnen und vergleichen Zahlen (vgl. Kernlehrplan Mathematik NRW)</td></tr>
<tr><td>Kompetenzen formulieren (Ich kann …)
– Mit Hilfe des Lehrplans
– Mit Hilfe des Schulbuchs</td><td>Für die ganzen Zahlen lassen sich bspw. die zuvor in Kapitel 2.3 genannten Kompetenzen in für die Lernenden am Ende der Klasse 6 verständliche Formulierungen übersetzen:
– Ich kann beschreiben, was das Minus vor einer Zahl bedeutet.
– Ich kann ganze Zahlen der Größe nach ordnen.
– Ich kann ganze Zahlen in einer Stellenwerttafel eintragen.
– Ich kann ganze Zahlen auf einer Zahlengerade anordnen.</td></tr>
<tr><td>Formulierung gezielter Diagnoseaufgaben (Kann ich …?)
– Die Diagnoseaufgaben beziehen sich auf die zuvor formulierten Kompetenzen (Ich kann …) und werden hier als Fragen formuliert
– Aufgaben müssen explizit die ausgewählte Kompetenz diagnostizieren (sehr fokussierte Aufgabenstellungen nötig)</td><td>2 Kann ich negative Zahlen auf der Zahlengeraden anordnen?

a) (1) Beschrifte die einzelnen Pfeile mit den passenden Zahlen!

(2)


Wichtig: Dieses ist nur eine Teilaufgabe aller zur Kompetenzdiagnostik erforderlichen Aufgaben. Zu jeder Kompetenz sollte mehr als eine Aufgabe gestellt werden, um nicht nur Rechenfehler zu diagnostizieren.</td></tr>
<tr><td>Finden typischer Schülerfehler
– Mit Hilfe eigener Erfahrungen aus Unterricht oder Klassenarbeiten
– Mit Hilfe fachdidaktischer Literatur</td><td>Typische Schülerfehler könnten hier u.a. sein, dass
– ausgehend von der Null nur positive Zahlen abgezählt werden,
– die Struktur des Zahlenstrahls („von links nach rechts werden die negativen Zahlen immer größer“) übernommen wird,
– oder die Beziehung zwischen den Strichen und den Stellenwerten nicht verstanden ist.</td></tr>
</table>

Erarbeiten der Auswertungsseite (I)

– Auf Basis möglicher fachlicher Fehler schülergerechte Formulierungen denkbarer Bearbeitungen der Diagnoseaufgaben aufschreiben

2. So habe ich negative Zahlen auf der Zahlengeraden angeordnet.

Ich habe die Aufgabe so bearbeitet:		**Ich kann zur weiteren Übung folgende Aufgaben bearbeiten:**	**Ich habe bearbeitet:**
Ich habe bei (1) die Zahlen -16, -4 und 17 eingetragen. Ich habe bei (2) die Zahlen -196, -168 und -138 eingetragen.	□		□
Ich habe bei (1) und (2) die richtige Zahlen, aber die Zeichen vor den Zahlen (Vorzeichen) sind manchmal falsch.	□		□
Ich habe bei (1) die Zahlen (-)24, (-)16 und 17 eingetragen. Ich habe bei (2) die Zahlen (-)204, (-)192 und (-)142 eingetragen.	□		□
Ich habe ganz andere Zahlen eingetragen (z.B. bei (2) 202, 186 und 141).	□		□

Fachliche Inhalte vertiefender Aufgaben festlegen

a. Bei richtiger Lösung:
Aufgaben, die vertiefend die behandelte Kompetenz thematisieren (Erweiterungsaufgaben)

– komplexere Situation oder Zusammenhänge,
– Aufgabe in anderem Kontext
– tiefer liegende Zusammenhänge ansprechen
– …

b. Bei falscher Lösung:
Typischen Fehler bzw. fehlendes Basiswissen aufgreifen (Erarbeitungsaufgaben)

– Konfrontation mit eigenem Fehler durch fiktive Schülerbeispiele
– Erarbeitung der Kompetenz durch hinführende, fachlich zunächst einfachere Aufgabenstellungen
– einfachere Situationen
– Erläuterung von Zusammenhängen
– …

2. So habe ich negative Zahlen auf der Zahlengeraden angeordnet.

Ich habe die Aufgabe so bearbeitet:		**Ich kann zur weiteren Übung folgende Aufgaben bearbeiten:**	**Ich habe bearbeitet:**
Ich habe bei (1) die Zahlen -16, -4 und 17 eingetragen. Ich habe bei (2) die Zahlen -196, -168 und -138 eingetragen.	□	Zahlengerade mit unregelmäßig eingetragenen und größeren Zahlen vorgeben	□
Ich habe bei (1) und (2) die richtige Zahlen, aber die Zeichen vor den Zahlen (Vorzeichen) sind manchmal falsch.	□	Übergang $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ am Zahlenstrahl durch Thematisieren des Bereichs um die 0	□
Ich habe bei (1) die Zahlen (-)24, (-)16 und 17 eingetragen. Ich habe bei (2) die Zahlen (-)204, (-)192 und (-)142 eingetragen.	□	Strukturübertragung vom Zahlenstrahl zur Zahlengerade über das konkrete Betrachten des Bereichs um die 0 und/oder die Betrachtung zweier von zwei Gegenzahlen gleich weit in positiver Richtung entfernter Zahlen (z.B. -8 und 12)	□
Ich habe ganz andere Zahlen eingetragen (z.B. bei (2) 202, 186 und 141).	□	Scheinbar Struktur des Zahlenstrahls nicht ausreichend erfasst (Was bedeuten die Striche?)	□

Wichtig: Die hier in der dritten Spalte notierten fachlich notwendigen Hilfestellungen bei den verschiedenen Schülerfehlern dienen lediglich als Grundlage für die Übungsaufgaben und werden den Schülerinnen und Schülern nicht transparent gemacht.

<table>
<tr>
<td>Erstellen vertiefender Aufgaben
– Gezielt vor dem Hintergrund der festgelegten Inhalte</td>
<td>Diese vertiefende Aufgabe dient der Sensibilisierung für die beiden Bereiche rechts und links von der Null und für das Konzept der Gegenzahl. Der Fokus liegt eher auf der Symmetrie der Zahlengeraden.
Eine andere Möglichkeit ist, kontextuell zu arbeiten. Der Fokus hierbei liegt auf der Ordnung ganzer Zahlen.

Ich übe, ganze Zahlen auf der Zahlengeraden anzuordnen.


Greta hat 7 Wochen lang jeden Montag die Temperatur auf ihrem Balkon gemessen. Dabei hat sie folgende Werte gemessen: 10°C, 8°C, 5°C, 2°C, 0°C, -3°C, -7°C. Trage diese Werte auf einer Zahlengeraden ein. Fange bei den 10°C an und gehe dann der Reihe nach.</td>
</tr>
<tr>
<td>Formulierung entsprechender Lösungen zu den vertiefenden Aufgaben
– In Form einer Musterlösung, teils mit mehreren Lösungsansätzen, wenn nötig</td>
<td>Lösung:

Trägt man die immer niedriger werdenden Temperaturen der Reihe nach ein, so sieht man, dass die Zahlen immer weiter links auf der Zahlengeraden liegen. Je weiter man nach links geht, desto kleiner werden die Temperaturen. Je weiter man nach rechts geht, desto größer werden die Temperaturen.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Erarbeiten der Auswertungsseite (II)
– Eintragen der entsprechenden Aufgabennummern in die Auswertungsseite</td>
<td>2. So habe ich negative Zahlen auf der Zahlengeraden angeordnet.
<table>
<tr><th colspan="2">Ich habe die Aufgabe so bearbeitet:</th><th>Ich kann zur weiteren Übung folgende Aufgaben bearbeiten:</th><th>Ich habe bearbeitet:</th></tr>
<tr><td>Ich habe bei (1) die Zahlen -16, -4 und 17 eingetragen.
Ich habe bei (2) die Zahlen -196, -168 und -138 eingetragen.</td><td>☐</td><td>Seite 3 Nr. 3 & 4</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>Ich habe bei (1) und (2) die richtige Zahlen, aber die Zeichen vor den Zahlen (Vorzeichen) sind manchmal falsch.</td><td>☐</td><td>Seite 3 Nr. 5 & 6</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>Ich habe bei (1) die Zahlen (-)24, (-)16 und 17 eingetragen.
Ich habe bei (2) die Zahlen (-)204, (-)192 und (-)142 eingetragen.</td><td>☐</td><td>Seite 4 Nr. 6 & 7</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>Ich habe ganz andere Zahlen eingetragen (z.B. bei (2) 202, 186 und 141).</td><td>☐</td><td>Seite 4 Nr. 8 & 9</td><td>☐</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Zum Weiterlesen

Das Feld der Diagnose und Förderung ist ein sehr breiter Bereich mit vielen theoretischen und praktisch orientierten Publikationen. Da in diesem Beitrag daher nur ein kleiner Ausschnitt aufgezeigt werden kann, sind im Folgenden ein paar ausgewählte Publikationen angegeben, in denen man viele hier im Beitrag nur angeschnittene Aspekte vertiefender nachlesen kann. Die ersten drei Angaben bieten einen guten Einblick in das Konstrukt Diagnose und zeigen anhand vieler kleinerer Beispiele auf, wie diagnostische Aufgaben gestaltet werden können. Dabei spielen individuelle mathematische Vorstellungen immer eine zentrale Rolle. Die weiteren zwei Angaben liefern einen ausführlichen Einblick in ganz konkrete Möglichkeiten, Diagnose und Förderung im Unterricht zu betreiben, und stellen Konzepte der Umsetzung vor.

Publikationen zu Aspekten von Diagnose

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). *Diagnose – Schülerleistungen verstehen. Praxis der Mathematik in der Schule*, *49*(15).

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). *Lernende abholen, wo sie stehen – Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. Praxis der Mathematik in der Schule, 53*(40).

Moser Opitz, E. (2010). Diagnose und Förderung: Aufgaben für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. *Beiträge zu Mathematikunterricht,* 2010, 11-18.

Praxisnahe Publikationen

Hußmann, S., Prediger, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2011). *mathewerkstatt. Diagnose und Fördern. 5. Schuljahr. Rechenbausteine – Handbuch. Handreichungen für den Unterricht*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T., & Barzel, B. (2011). „Erst mal alle auf einen Stand bringen …“ Diagnosegeleitete und individualisierte Aufarbeitung arithmetischen Basiskönnens. *Pädagogik, 63*(5), 20-24.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern – Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2012 (S. 93–96). Münster: wtm Verlag.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, J. & Weiß, M. (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* (4), 469–520.

Becker, G., Horstkemper, M., Risse, E., Stäudel, L., Werning, R. & Winter, F. (2006). *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken – können entwickeln. Friedrich Jahresheft* 24.

Fernholz, J. & Prediger, S. (2007). „… weil meist nur ich weiß, was ich kann!“ Selbstdiagnose als Beitrag zum eigenverantwortlichen Lernen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(15), 14–18.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität – Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Helmke, A., Hosenfeld, I. & Schrader, F.-W. (2003). Diagnosekompetenz in Ausbildung und Beruf entwickeln. *Karlsruher Pädagogische Beiträge*, (55), 15–34.

Horstkemper, M. (2004). Diagnosekompetenz als Teil pädagogischer Professionalität. *Neue Sammlung, 2*, 201–214.

Hußmann, S. (2007). Den Einzelnen in den Blick nehmen – mit kompetenzorientierten und differenzierenden Aufgaben im Mathematikunterricht. In S. Hußmann & E. Nyssen (Hrsg.), *Individualisieren – Differenzieren – Vernetzen* (S. 99–110). Hildesheim: Franzbecker.

Hußmann, S. Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(15), 1–8.

Hußmann, S., Liegmann, A.B., Racherbäumer, K. & Walzebug, C. (2009). indive – Individualisierung von Lehr-Lernprozessen im Netzwerk von Schule und Hochschule. In N. Berkemeyer, H. Kuper, V. Manitius & K. Müthing (Hrsg.). *Schulische Vernetzung. Eine Übersicht zu aktuellen Netzwerkprojekten* (S. 119–128). Münster: Waxmann.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(17), 2–8.

Hußmann, S., Prediger, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2011a). *mathewerkstatt. Diagnose und Fördern. 5. Schuljahr. Rechenbausteine – Selbsttest.* Berlin: Cornelsen.

Hußmann, S., Prediger, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2011b). *mathewerkstatt. Diagnose und Fördern. 5. Schuljahr. Rechenbausteine – Training.* Berlin: Cornelsen.

Ingenkamp, K. (2005). *Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik*. Bearbeitet von U. Lissmann (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Moser Opitz, E. (2010). Diagnose und Förderung: Aufgaben für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2010 (S. 11–18). Münster: wtm Verlag.

Phye, G. D. (1997). *Handbook of classroom assessment. Learning, adjustment and achievement*. San Diego: Academic Press.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

Prediger, S. Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2011). Vorversion „Erst mal alle auf einen Stand bringen …“. Diagnosegeleitete und individualisierte Aufarbeitung arithmetischen Basiskönnens. Erscheint in: Pädagogik 63(5). Online unter: http://www.ko-si-ma.de/front_content.php?idcat=453

Prediger, S. & Selter, Ch. (2008). Diagnose als Grundlage für individuelle Förderung im Unterricht. *Schule NRW, 60*(3), 113–116.

Schrader, F.-W. (1997). Lern- und Leistungsdiagnostik im Unterricht. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie – Pädagogische Psychologie. Band 3. Psychologie des Unterrichts und der Schule* (S. 659–699). Göttingen: Hogrefe.

Schrader, F.-W. (2001). Diagnostische Kompetenz von Eltern und Lehrern. In D.H. Rost (Hrsg.). *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie (*2. überarb. u. erw. Auflage, S. 91–96). Weinheim: Beltz.

Schrader, F.-W. (2006). Diagnostische Kompetenz von Eltern und Lehrern. In D.H. Rost (Hrsg.) *Handwörterbuch Pädagogischer Psychologie* (3., überarb. Aufl., S. 95–100). Weinheim: Beltz.

Weinert, F.E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. Vortrag, gehalten am 29.03.2000 im Pädagogischen Zentrum in Bad Kreuznach. Online unter: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/2000_weinert_lehren_lernen.pdf [Abruf 05.05.2015].

3 Lernaufgaben

3.1 Bedeutung und Merkmale von Lernaufgaben

Nicht zuletzt durch internationale Vergleichsstudien der vergangenen Jahre, wie PISA oder TIMSS, ist die Qualität von Aufgaben im Unterricht seit einiger Zeit ein fächerübergreifender Diskussionsanlass. Die Reflexion und Veränderung der sogenannten „Aufgabenkultur" ist in den letzten Jahren zu einer zentralen Idee fachdidaktischer Entwicklungsarbeit avanciert (vgl. z.B. Büchter & Leuders, 2005; Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2006; Thonhauser, 2008; Reusser, 2011). Speziell im Mathematikunterricht spielen Aufgaben beim Lehren und Lernen eine wichtige Rolle. Aber woran bemisst sich eigentlich die Qualität einer Aufgabe? Auf diese Frage lässt sich keine pauschale Antwort finden, denn es kommt immer darauf an, welche Funktion die eingesetzte Aufgabe erfüllen soll (vgl. Büchter & Leuders, 2005). So gelten beispielsweise für Aufgaben zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge andere Kriterien als für Aufgaben, die zum Systematisieren und Sichern oder zum Üben und Wiederholen bereits erlernter Inhalte angelegt sind.

Die Qualität einer Aufgabe hängt also immer davon ab, wie gut sie ihren jeweiligen Zweck erfüllt. Von großer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang, dass sowohl für die Lehrenden als auch für die Lernenden transparent ist, welche Rolle bestimmte Aufgabenformate bzw. Arbeitsaufträge im Lehr-Lernprozess einnehmen. In der didaktischen Diskussion wird häufig darauf hingewiesen, dass im deutschen Schulunterricht besonders *Lern-* und *Leistungs*situationen vermischt werden (vgl. etwa Bruder, Büchter & Leuders, 2005; Leisen, 2006). Dies führt beispielsweise dazu, dass Schülerinnen und Schüler Lernsituationen nicht als das, was sie eigentlich sind – und zwar Gelegenheiten zum *Lernen* – wahrnehmen, sondern von einer anhaltenden Leistungsbeurteilung ausgehen. Wie unterschiedlich sich aber die Zielsetzung und der Einsatzbereich beider Aufgabentypen eigentlich gestalten, verdeutlichen Bruder et al. (2005) zusammenfassend in folgender Tabelle:

Tabelle 1: Aufgaben für das Lernen und Leisten (aus Bruder et al., 2005, S. 2)

Aufgaben für das Lernen	**Aufgaben für das Leisten**
sind angelegt auf Offenheit, Divergenz, Prozesse, Lösungsvielfalt	sind angelegt auf Bewertbarkeit, Konvergenz, sichtbare Ergebnisse
sollen Fehler als Chance für das Lernen begreifen lassen	fordern eher das Vermeiden von Fehlern
erlauben bzw. unterstützen Kooperation und Kommunikation	fokussieren auf Einzelleistung
„Wichtig ist, was im Kopf stattfindet" (Kompetenz)	„Wichtig ist, was Schüler zeigen" (Performanz)
sind Aufgaben z. B. zum • **Erkunden, Entdecken, Erfinden** • **Sammeln, Sichern, Systematisieren** • **Üben, Vernetzen, Wiederholen**	sind Aufgaben z. B. zum • **Anwenden** (Kompetenzerleben) • **(Selbst-)Überprüfen** sowie zur • **Leistungsbewertung**

Gerade im Hinblick auf das eigenständige Erschließen und Reflektieren bedeutsamer mathematischer Zusammenhänge haben sogenannte *Lernaufgaben* einen großen Stellenwert, denn „wer sonst sollte Mathematik lernen, wenn nicht die Lernenden selbst?!" (Hußmann, 2003, S. 10).

Der Begriff *Lernaufgabe* findet sowohl in didaktischen als auch in erziehungswissenschaftlichen Publikationen vielfache Anwendung und ist daher nicht ganz einfach einheitlich zu definieren. Vor berufspädagogischem Hintergrund beschreibt zum Beispiel Krogoll:

> „Lernaufgaben sind im pädagogischen Arbeitsalltag meist als solche Arbeitsaufträge der Lehrenden an die Lernenden beobachtbar, mit denen eine Lernerselbsttätigkeit in Gang gesetzt und in Gang gehalten werden soll, die auf eine Selbsterschließung von neuem Wissen und Können zielt." (Krogoll, 1998, S. 152)

Differenzierender und aus allgemeindidaktischer Perspektive argumentiert Reusser:

> „In allen Fächern und Stufen besteht ein Bedarf an attraktiven, inhaltlich bedeutsamen, kognitiv und motivational anregenden Lernaufgaben, d.h. von Aufgaben, welche auf authentische Weise Kernideen eines Faches repräsentieren, auf unterschiedlichen Niveaus lösbar sind, variable Denkwege erlauben und zu Exploration, Problemlösen, kooperativem Lernen und diskursivem Austausch, d.h. zur Übung fachlicher/überfachlicher Lernstrategien und Fähigkeiten einladen." (Reusser, 2011, S. 25)

Für den Mathematikunterricht lassen sich aus der fachdidaktischen Diskussion (vgl. hierzu etwa Barzel, Prediger, Leuders & Hußmann, 2011; Bruder et al., 2005; Büchter & Leuders, 2005; Hengartner, Hirt & Wälti, 2006) im Kern vor allem die folgenden Merkmale ableiten:

Kasten 1: Merkmale von Lernaufgaben

Lernaufgaben
- sind inhaltlich bedeutsam und folgen mathematischen Kernideen,
- sind auf Eigentätigkeit der Lernenden ausgelegt und haben ein dementsprechend hohes Aktivierungspotenzial,
- sind kompetenzorientiert und ermöglichen differenziertes Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus,
- regen mathematische Aktivitäten, wie Problemlösen, Modellieren und Argumentieren/Kommunizieren, an,
- sind offen und ermöglichen vielfältige Lösungswege.

Anwendung finden solche Aufgaben in allen drei Kernprozessen *Erkunden*, *Systematisieren* und Üben, aber vorrangig werden sie für die Erkundenphase genutzt.

Für die Konstruktion und den Einsatz von Lernaufgaben ergeben sich vielfältige Möglichkeiten, die wiederum von den konkreten Zielen abhängen, die mit der jeweiligen Aufgabenstellung verfolgt werden. Dabei ist beispielsweise wichtig, welcher inhaltliche Gegenstand zugrunde liegt, welche Kernideen im Zentrum stehen, für welche Lernphase die Aufgabe ausgelegt ist, welche Aktivitäten im Einzelnen angeregt werden sollen usw. Zudem gibt es auch verschiedene Vorgehensweisen bei der Erstellung geeigneter Lernaufgaben, die sich durch unterschiedliche Taktiken, aber auch durch unterschiedlichen Konstruktionsaufwand auszeichnen. In den folgenden Abschnitten werden einige Beispiele für Lernaufgaben zu unterschiedlichen Kernprozessen vorgestellt.

Da der Lernphase des Sicherns und Systematisierens und dem diagnosegeleiteten Übens in diesem Band bereits eigene Abschnitte gewidmet sind (vgl. Kapitel 2 und 4) stehen im Teilkapitel „Do-it-yourself" mögliche „Bauanleitungen" und Anregungen für die Entwicklung von Lernaufgaben zum Entdecken und Erkunden im Fokus.

3.2 Bedeutung für den Ganztag

Die Entwicklung inhaltlich gehaltvoller und differenzierender Lernumgebungen findet auch außerhalb des Ganztags statt. Daher stellen Lernaufgaben kein Aufgabenformat dar, das ausschließlich auf den Mathematikunterricht im Ganztag ausgerichtet ist. Da aber besonders unter den ganztagsspezifischen Bedingungen die Selbstständigkeit der Lernenden und die Verantwortung für den eigenen Lernprozess an Gewicht gewinnen, ist der Einsatz von Lernaufgaben gerade in diesem Kontext ein fruchtbarer Ansatz.

Individuelles Lernen findet im Ganztag zunehmend im Schulalltag statt. Es ist hier besonders wichtig für einen „hohen Anteil echter Lernzeit" (Meyer, 2004, S. 39ff.) zu sorgen – auch außerhalb des Regelunterrichts. Je nach schulspezifischem Ganztagskonzept gibt es beispielsweise für das Fach Mathematik anberaumte „Lernzeiten", die teilweise auch fachfremd betreut werden müssen. Häufig werden solche Stunden daher zur Erledigung von eher geschlossenen Arbeitsaufträgen genutzt und ersetzen die typischen Hausaufgaben.

Lernzeiten bieten aber auch die Möglichkeit für ein sinnvolles Differenzierungsangebot, das auf einer selbständigen Auseinandersetzung der Lernenden mit dem fachlichen Gegenstand basiert. Der Einsatz von Lernaufgaben, also einem Aufgabenformat, das vorrangig auf *offene Differenzierung* (vgl. Hußmann & Prediger, 2007) ausgerichtet ist, ist daher eine sinnvolle Alternative. Ein wichtiges Ziel solcher Differenzierungskonzepte, die auch als *natürliche Differenzierung* oder *Selbstdifferenzierung* (vgl. Müller & Wittmann, 1998; Büchter & Leuders, 2005) beschrieben werden, liegt darin begründet, dass die Lernenden selbst einen Teil der Verantwortung für ihr individuell passendes Leistungsniveau übernehmen. Für Lehrkräfte ist die Selbstdifferenzierung eine deutliche Entlastung, wenn Lernende dazu befähigt werden, im Rahmen reichhaltiger Lernumgebungen persönliche Herausforderungen selbst zu definieren (vgl. Hußmann & Prediger, 2007). Zu Schwierigkeiten kann es allerdings kommen, wenn das Festlegen der eigenen Bearbeitungsziele völlig beliebig geschieht und die Lernenden nicht auf ihrem eigentlichen Niveau arbeiten. Um dies zu vermeiden, ist es wichtig, die Schülerinnen und Schüler im Regelunterricht auf ein selbstständiges Arbeiten, welches auch das Einschätzen und Abrufen des eigenen Leistungspotenzials umfasst, vorzubereiten. Mit zunehmender Erfahrung können Lernmaterialien dann Schritt für Schritt offener gestaltet werden und die Steuerung der Lernprozesse durch die Lehrperson tritt zunehmend in den Hintergrund. Wichtig ist zudem, dass den Lernenden deutlich ist, dass sie sich bei der Arbeit an den Lernaufgaben in einer *Lern-* und nicht etwa in einer *Leistungs*situation befinden (vgl. Abschnitt 3.1). Die jeweiligen Lernziele, die mit den eingesetzten Materialien verfolgt werden, sollten den Schülerinnen und Schülern transparent sein und es sollte deutlich werden, dass Fehler in diesem Zusammenhang – auch bei einer späteren Diskussion der Ergebnisse – kein Zeichen eines Scheiterns (im Sinne einer Leistungsbewertung) sind, sondern als Anlass für eine konstruktive Weiterentwicklung der Ideen und somit als Chance für das Lernen verstanden werden.

Unter den passenden Voraussetzungen und mit einer entsprechenden Vorbereitung sind Lernaufgaben – sowohl innerhalb als auch außerhalb des Regelunterrichts – ein fruchtbares Format für den Mathematikunterricht im Ganztag und eine sinnvolle Antwort auf einige der damit verbundenen Ziele und Herausforderungen.

3.3 Beispiele

Für jede Lernphase und jeden Lerngegenstand gibt es viele Möglichkeiten, gewinnbringende und gehaltvolle Lernaufgaben einzusetzen. Die Konkretisierung von Aufgabenmaterial hängt dabei von den verfolgten Lernzielen, vom Vorwissen der Lernenden, vom inhaltlichen Gegenstand und den angestrebten Prozessen ab. Der mögliche Aufgabenumfang deckt ein Spektrum von einzelnen Fragstellungen bis zur Erforschung und Entwicklung neuer Konzepte im Rahmen größerer inhaltlicher Kontexte ab (z.B. die Entwicklung natürlich differenzierender Lernumgebungen von Hengartner et al., 2006). Aufgrund der vielen möglichen Variationen, die sich dadurch ergeben, können im Rahmen dieses Bandes nur einzelne Beispiele angegeben und diskutiert werden, aus denen sich Überlegungen für die Gestaltung weiterer Lernarrangements ableiten lassen.

Für den Lernprozess gibt es (in Anlehnung an Barzel et al., 2011) drei entscheidende Kernprozesse, in denen im Allgemeinen unterschiedliche Prozesse stattfinden: die Phase des *Erkundens und Entdeckens* mathematischer Begriffe und Zusammenhänge, die Phase des *Systematisierens und Sicherns* erworbenen Wissens und die Phase des Übens und Vertiefens erlernter Inhalte. Jede der genannten Kernprozesse lässt sich grundsätzlich durch den Einsatz fruchtbarer Lernaufgaben einleiten, organisieren und unterstützen. Die Ziele, die in den jeweiligen Kernprozessen verfolgt werden, sind dabei handlungsleitend für die Erstellung geeigneter Materialien, allerdings ist es ein Irrtum davon auszugehen, dass es sich bei den Kernprozessen um voneinander isolierte Abschnitte im Lernprozess handelt. Bei jedem Erkunden neuer Begriffe wird beispielsweise auch Vorwissen vertieft oder erworbene Konzepte neu strukturiert, während auch beim Üben erlernter Inhalte neue Strukturen und Zusammenhänge entdeckt werden – der letzte Aspekt ist zum Beispiel ein zentrales Ziel des Konzepts des „Produktiven Übens“ (vgl. Wittmann & Müller, 1990; 1992).

Erkunden und Entdecken

Für das Erkunden und Entdecken mathematischer Begriffe und Zusammenhänge gibt es sowohl in innermathematischen als auch in außermathematischen Kontexten substanzielle Anlässe (vgl. Abschnitt 3.4). Rein inhaltlich liefert zum Beispiel das „Prinzip der Variation mathematischer Produkte“ (Büchter & Leuders, 2005, S. 129) einen reichhaltigen Schatz für die Erkundung neuer Zusammenhänge. Beispielsweise können Lernende besondere Spezialfälle untersuchen oder bereits erworbene Begriffe eigenständig variieren (vgl. Schupp, 2002) und untersuchen, welche Konsequenzen die Variation dieses oder jenes begrifflichen Aspekts zur Folge hat. Aus den „alten Produkten“ entstehen so verschiedene neue Konzepte und die Schülerinnen und Schüler erwerben auf unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden neues begriffliches Wissen.

Für das Erkunden in außermathematischen Kontexten kann es (im Vergleich zum Finden und passenden Aufbereiten realer Situationen) ein arbeitserleichternder Ansatz sein, zunächst realitätsbezogene Schulbuchaufgaben auf ihre Problemhaltigkeit hin zu untersuchen. Durch Umformulierungen, ergänzende Fragen, Weglassen von Informationen, Einbauen von divergenten Elementen, etc. (dazu mehr in Abschnitt 3.4) können, mit vergleichsweise niedrigem Arbeitsaufwand, auch geschlossene Schulbuchaufgaben zu Lernaufgaben „umgebaut“ werden (vgl. ebenfalls Abschnitt 3.4), die zum Erkunden und Entdecken einladen.

Büchter und Leuders (2005) nehmen sich beispielsweise die geschlossene Schulbuchaufgabe in Abbildung 1 vor und konstruieren daraus schrittweise eine Lernaufgabe. Hierzu folgen auch noch einige Vorschläge der Autoren zur weiterführenden Öffnung der Aufgabe (vgl. Büchter & Leuders, 2005). Die veränderte Fragestellung und mögliche Kriterien, unter denen die Aufgabe zur Lernaufgabe umgestaltet wurde, werden in Abschnitt III.4 vorgestellt.

Abbildung 1: Geschlossene Schulbuchaufgabe als Basis zur Konstruktion einer Lernaufgabe

Bei einem Schulfest werden 280 Teilnehmer erwartet. Pro Person werden 0,8 l Getränke bereitgestellt. Es kommen aber 320 Besucher. Wie viel l Getränke stehen jetzt pro Person zur Verfügung?

(Cornelsen, Mathematik 7. Schuljahr, übernommen aus Büchter & Leuders, 2005, S.120)

Systematisieren und Sichern

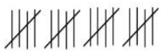
Die Phase des Sicherns und Systematisierens wird in der Schulpraxis häufig durch ein Klassengespräch eingeleitet, welches von der Lehrperson moderiert wird. Diese bemüht sich dabei anfangs um Zurückhaltung und Wertschätzung der Schülerbeiträge. Die abschließende Klärung dessen, was (auch aus formaler Sicht) richtig ist und welche Inhalte und Aspekte letztendlich wie gesichert werden müssen, findet in der Regel nicht selten lehrerzentriert statt.

Es ist allerdings auch möglich die Sicherungs- und Systematisierungsphase durch Lernaufgaben zu organisieren, die Schülerinnen und Schülern mehr Selbstbeteiligung und Aktivität einräumen. Obwohl diese Lernphase letztlich auch auf den Erwerb konsolidierten und konvergenten Wissens abzielt, kann sowohl das Zusammentragen und Gegenüberstellen von Ansätzen und Ergebnissen als auch das Verknüpfen neuer Erkenntnisse mit normierten Begriffen und Konventionen der „fertigen Mathematik“ durch differenzierende und aktivierende Aufgaben gestaltet werden (vgl. hierzu auch die in Kapitel 4 vorgestellten Materialformate). Neben Methoden und Aufgaben zum Clustern von Begriffen und Zusammenhängen, weisen Büchter und Leuders (2005, S. 137) das „Systematisieren durch Bewerten“ als inhaltlich gehaltvolle und gewinnbringende Möglichkeit aus. Die Autoren geben in diesem Zusammenhang ein Beispiel aus einem Schulbuch für die 5. Klasse an, indem es darum geht, nach der Erkundung verschiedener Zahlsysteme, die Beobachtungen und Feststellungen systematisch miteinander in Bezug zu setzen und zu vergleichen.

Abbildung 2: Systematisierungsaufgabe Zahlensystem

Welches Zahlensystem ist das beste?

Unsere Warentester haben verschiedene Zahlsysteme auf den Prüfstand gestellt. Wir wollten wissen, welches Zahlensystem sich für den täglichen Gebrauch am besten eignet. Verglichen wurden die folgenden Systeme:

- System Ägyptisch
- System Römisch
-  System Arabisch
- System „Strichliste“:

Jedes der Systeme haben wir in vier Tests auf Herz und Nieren geprüft:
Test 1: Wie viele verschiedene Zeichen muss man insgesamt lernen?
Test 2: Wie viele Zeichen braucht man, um eine kleine Zahl zu schreiben?
Test 3: Wie einfach lassen sich sehr große Zahlen schreiben?
Test 4: Welche Fehler kann man beim Schreiben der Zahlen machen?

Verfasst einen Testbericht. Verwendet dazu Bewertungen wie z.B. „Das System X hat uns zunächst überzeugt, weil … Allerdings kann es nicht so gut … Wir raten zu folgender Verbesserung …“.

(Lambacher/Schweizer, Gymnasium, NRW, 5. Klasse, 2005; übernommen aus Büchter & Leuders, 2005)

Durch die vorgeschlagenen „Tests“ und den Auftrag, einen bewertenden Bericht zu verfassen, wenden die Lernenden die zuvor im Rahmen der verschiedenen Zahlsysteme erkundeten Begriffe und Verfahren parallel an und stellen auf diese Weise systematisch und vergleichend Bezüge zwischen ihnen her. Aufgrund der einzelnen vorgeschlagenen „Tests“ ist die Aufgabe zwar inhaltlich vorstrukturiert und den Lernenden ist transparent, welche Aspekte im Vergleich besonders berücksichtigt werden sollen, die Offenheit der Arbeitsaufträge ermöglicht aber gleichsam differenzierte Bearbeitungen auf verschiedenen Niveaus. Zudem werden die Lernenden zum Austausch und zur Kooperation angeregt.

Üben und Vertiefen

Auch die Phase des Übens und Vertiefens bietet verschiedene Möglichkeiten der inneren Differenzierung. So geben etwa Wittmann und Müller (1990, 1992) viele Beispiele innerhalb eines breiten Spektrums produktiver Rechenübungen im Primarunterricht, deren Differenzierungspotenzial vor allem in der Struktur der inhaltlichen Gegenstände selbst und deren Organisation in Form von Rechenaufgaben begründet liegt (vgl. hierzu auch Hengartner et al., 2006). Zudem gibt es, gerade für den Sekundarbereich, auch verschiedene Ansätze und Beispiele für inhaltlich authentische, realitätsbezogene Lernarrangements, die zum differenzierten Vertiefen und Üben bereits erlernter Inhalte einladen. Ein Beispiel für eine differenzierende Vertiefung bereits erworbener geometrischer und algebraischer Kompetenzen in Klasse 6, welches ursprünglich als längerfristige Hausaufgabe konzipiert wurde, sich aber auch gut für den Einsatz in Lernzeiten eignet, findet sich beispielsweise bei Hußmann und Prediger (2007) und ist in Abbildung 3 dargestellt.

Abhängig von den individuellen Entscheidungen und Fähigkeiten der Lernenden wird hier sowohl nach inhaltlichem Komplexitätsgrad (Ist das Zimmer zum Beispiel verwinkelt? Wird mit nicht ganzzahligen Maßen gearbeitet? usw.) einerseits, aber auch nach individuellem Tempo und Arbeitsumfang andererseits differenziert. Zudem bietet die Aufgabe auch die Möglichkeit weitere Kompetenzen, wie etwa das maßstabsgetreue Zeichnen und eigene kreative Ideen mit einzubringen (vgl. Hußmann & Prediger, 2007).

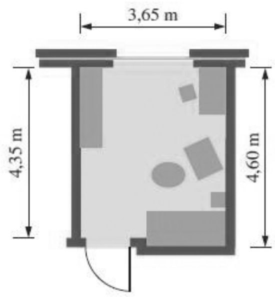
Abbildung 3:
Vertiefungsaufgabe
„Mein Traumzimmer"

„Mein Traumzimmer"
Für diese Hausaufgabe hast du länger Zeit als sonst. Du sollst sie aber auch besonders ordentlich und rechnerisch nachvollziehbar gestalten.

Bei dieser Hausaufgabe sollst du dir überlegen, wie das Zimmer aussähe, in dem du dich am wohlsten fühlen würdest: Dein Traumzimmer! Der Fantasie sind keine Grenzen gesetzt. Es soll nur ein Zimmer in einem Haus, mit Fußboden, Wänden und Decke sein.

Dein Zimmer sollst du zeichnen, es einrichten und kannst es farbig anmalen. Du kannst es auch basteln, mit Wänden und allem, was dazugehört. Die Rechnungen notierst du auf einem karierten Papier, ebenso ordentlich wie deine Zeichnung.

(1) Zeichne dein Traumzimmer mit Bleistift und Geodreieck oder Lineal auf ein weißes Blatt Papier. Wähle dazu einen geeigneten Maßstab.
Trage auf dem Grundriss die Längenangaben in Metern ein.
Gestalte und richte es ein, wie du möchtest.



(2) Überlege dir, welchen Bodenbelag (Teppich, Teppichfliesen, Laminat, Fliesen, …) du in deinem Zimmer verlegen möchtest.
   a) Berechne, wie viel du von dem jeweiligen Belag brauchst.
   b) Erkundige dich in einem Geschäft oder Prospekt nach dem m^2-Preis für den Belag.
   Wenn möglich, klebe einen entsprechenden Prospektausschnitt zu deiner Rechnung.
   Berechne nun, was du für deinen Bodenbelag insgesamt bezahlen müsstest.

(3) Bringe in deinem Zimmer auch Zierleisten an der Decke und Fußleisten an.
Wie viel Meter wirst du jeweils brauchen?

(4) Üblicherweise werden die Zimmerdecken mit Farbe gestrichen. Berechne, für wieviel Quadratmeter du Farbe einkaufen musst. Erkundige dich auch hier nach den Preisen im Handel und füge einen Prospektausschnitt bei. Berechne die Kosten für die gesamte Farbe.

(5) Welche Farbe oder Tapete sollen die Zimmerwände bekommen? Und was kostet die pro m^2? Bevor du berechnest, wie viel Farbe oder Tapete du kaufen musst und was dich das kosten wird, überlege dir, wie du rechnen musst! (Vorsicht, werden Fenster und Türen auch angestrichen oder tapeziert?)

(aus Hußmann & Prediger, 2007, Urfassung von Rüdiger Vernay)

3.4 Do-it-yourself – Entdecken und Erkunden

Nach der Einführung und Einordnung des Aufgabenformats in den vorigen Abschnitten, sollen nun Möglichkeiten und Anleitungen für die *Entwicklung* von Lernaufgaben im Bereich des Erkundens und Entdeckens mathematischer Begriffe und Zusammenhänge vorgestellt werden. Aus den in Abschnitt 3.1 zusammengestellten Merkmalen von Lernaufgaben (vgl. Kasten 1) lässt sich zu diesem Zweck eine Checkliste zur Überprüfung zentraler Kriterien entwickeln. Für die Entwicklung von Aufgaben, die zum aktiven Entdecken und Erkunden einladen, muss die oben aufgeführte Liste noch um zwei entscheidende Merkmale ergänzt werden. Zum einen ist es für das selbstständige Generieren neuen fachlichen Wissens besonders wichtig, dass Arbeitsaufträge und Aufgaben an Vorerfahrungen und Vorwissen der Lernenden anknüpfen und in diesem Sinne gut *zugänglich* sind. Zum anderen ist es bedeutsam, dass die Lernarrangements „echte Probleme" aufwerfen, die die Konstruktion neuer Begriffe, die Entwicklung neuer Verfahren oder das Knüpfen neuer inhaltlicher Zusammenhänge erfordert. *Problemhaltige*, intentionale Situationen (vgl. Hußmann, 2007; Wittmann, 1996) eignen sich besonders um solche Prozesse zu initiieren. Für die Entwicklung eigener Lernaufgaben für den Unterricht dient die Checkliste in Kasten 2 als Orientierungshilfe.

Kasten 2: Checkliste – Lernaufgaben für das Entdecken und Erkunden

Checkliste für die Entwicklung von Lernaufgaben für das Entdecken und Erkunden	
Inhaltliche Bedeutsamkeit	Welche mathematischen Kernideen stehen im Fokus? Welche zentralen Aspekte können von den Lernenden selbstständig erkundet und entwickelt werden?
Aktivierungspotenzial	Werden die Lernenden aktiviert und eigenständige Erarbeitungsprozesse angestoßen? Welche Aufgabenelemente und Fragestellungen eignen sich im entsprechenden inhaltlichen Kontext besonders gut dafür?
Differenzierungsvermögen	Gibt es Bearbeitungsmöglichkeiten für alle Kompetenzstufen? Wie kann etwa eine „niedrige Einstiegsschwelle" (vgl. Hengartner et al., 2006), die allen Lernenden den Zugang ermöglicht, geschaffen werden? Wie können Herausforderungen für stärkere Schülerinnen und Schüler aussehen?
Prozessorientierung	Stehen mathematische Prozesse (und nicht etwa fertige Produkte) im Vordergrund? Können auch inhaltliche Fehler als Chance für eine konstruktive Weiterentwicklung fruchtbar gemacht werden? Welche Prozesse sollen besonders angeregt werden?
Offenheit	Gibt es verschiedene Ansätze und Lösungswege? Sind divergente Ergebnisse möglich und erwünscht? Wie kann die Aufgabenstellung ggf. weiter geöffnet werden?
Zugänglichkeit	Knüpft die Aufgabe an Vorerfahrungen und Vorwissen der Lernenden an? Ist die Ausgangssituation anschaulich (gibt es zum Beispiel einen tragenden Kontext)? Wie können entsprechende Anknüpfungspunkte geschaffen werden?
Problemhaltigkeit	Stellt sich in der Aufgabe ein „echtes Problem", das die Konstruktion neuer Begriffe, die Entwicklung neuer Verfahren oder das Knüpfen neuer Zusammenhänge erfordert? Wie kann die Aufgabenstellung diesbezüglich authentischer und herausfordernder gestaltet werden?

Abhängig vom inhaltlichen Gegenstand, können sich sowohl inner- als auch außermathematische Kontexte und Situationen für fruchtbare Erkundungen anbieten. Im folgenden Abschnitt werden beispielhaft zwei mögliche Entwicklungstypen vorgestellt.

Erkundungen in außermathematischen Situationen – realitätsbezogene Schulbuchaufgaben zur Lernaufgabe umgestalten

Bei der Entwicklung von Lernaufgaben zum Erkunden in außermathematischen Situationen kann es ein ertragreicher Ansatz sein, sich an realitätsbezogenen Schulbuchaufgaben zu orientieren, um diese dann – sofern der Kontext hinreichend problemhaltig ist – anhand der entsprechenden Kriterien zur Lernaufgabe umzugestalten (vgl. Abschnitt 3.3).

Büchter und Leuders (2005) geben etwa das bereits in Abschnitt 3.3 vorgestellte Beispiel (siehe Abb. 4) an und bauen es Schritt für Schritt zu einer immer offeneren Lernaufgabe um.

Abbildung 4: Realitätsbezogene Ausgangsaufgabe

Ausgangsaufgabe

Bei einem Schulfest werden 280 Teilnehmer erwartet. Pro Person werden 0,8 l Getränke bereitgestellt. Es kommen aber 320 Besucher. Wie viel l Getränke stehen jetzt pro Person zur Verfügung?

(Cornelsen, Mathematik 7. Schuljahr, übernommen aus Büchter & Leuders, 2005, S.120)

Die Ausgangsaufgabe, die zunächst eine geschlossene Textaufgabe darstellt und wenig mit einer differenzierenden und fordernden Erkundungssituation zu tun hat, hat mehr Potenzial als man ihr auf den ersten Blick ansieht.

Die Ausgangssituation sowie die Fragestellung sind für Lernende grundsätzlich gut zugänglich, allerdings stellt sich zunächst kein „echtes Problem", welches die Entwicklung geeigneter Verfahren oder Vorgehensweisen erfordert und die Situation ist wenig aktivierend. Dies ist zum Teil auch der fehlenden Authentizität der Aufgabenstellung geschuldet. Stellt man sich die reale Planung eines Schulfestes vor, stellen sich zunächst einmal andere Fragen – etwa nach der Zusammensetzung der Besucherschaft, mit wie vielen Teilnehmern überhaupt zu rechnen ist, wieviel wohl jeder im Schnitt trinkt usw. Auch sind in diesem Zusammenhang eher Überschlagsrechnungen zu erwarten als die exakte Quantifizierung (vgl. Büchter & Leuders, 2005). Weiterhin steckt in der Aufgabe noch mehr inhaltliches Potenzial. Was wäre zum Beispiel, wenn die Besucherzahl weiter wächst, die Gesamtmenge an Getränken aber gleich bleibt? Wie ändert sich dann die Getränkeration pro Person? Als gewinnbringende Problemstellung kann hier beispielsweise der (antiproportionale) Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen in den Blick genommen werden. Auf diese Weise können die Lernenden etwa durch systematisches Variieren auch weiterführende und allgemeinere Einsichten in das Problem gewinnen. Auch hinsichtlich der Offenheit des Lösungsweges und des Differenzierungsvermögens lässt die obige Fassung zu wünschen übrig. Letztlich wird hier ein festes und richtiges Ergebnis mit konvergentem Lösungsweg angestrebt. Bearbeitungsmöglichkeiten auf verschiedenen Kompetenzstufen sind nicht vorgesehen.

Anhand vergleichbarer Überlegungen kommen die Autoren schließlich zur veränderten Aufgabenstellung in Abbildung 5.

In dieser Version können die Schülerinnen und Schüler individuelle Lösungswege beschreiten und die Aufgabe auf unterschiedlichen Kompetenzstufen bearbeiten. Manche Lernende korrigieren Ali möglicherweise nur, während andere auch begründen, warum seine angegebene Rechnung nicht passt (vgl. Büchter & Leuder, 2005).

> *Bei einem Schulfest der Erlenbach-Realschule (200 Schüler) soll sich ein Team aus den 8. Klassen um die Getränkeversorgung kümmern.*
>
> *Peter überschlägt: „Also pro Schüler kommt im Schnitt noch jeweils eine Person und trinkt etwa zwei Getränke, also 0,4 l."*
>
> *Silke rechnet: „Dann brauchen wir 160 l Getränke. Mann, ist das viel."*
>
> *Ali meint: „Und was wenn jeder drei Gäste mitbringt? Dann sind das 800 Leute!"*
>
> *Silke nimmt den Taschenrechner: „Dann bekommt jeder halt nur 0,2 Liter …"*
>
> *Ali steigert sich: „Und wenn es 1600 Leute sind? Dann bekommt jeder 0 Liter."*
>
> *Überprüfe die Rechnungen und Argumente des Getränketeams. Kannst du ihnen helfen?*
>
> (aus Büchter & Leuders, 2005, S. 121)

Abbildung 5: Umgestaltete Aufgabe Fassung 1

Bezüglich der Offenheit der Aufgabenstellung gehen die Autoren noch einen Schritt weiter. Während in der obigen Fassung noch alle Werte vorgegeben sind, verzichten sie in einem nächsten Schritt auf diese Angaben, so dass die Schüler selbst entsprechende Annahmen für die Planung treffen müssen. Dabei entsteht die Fassung in Abbildung 6.

> *Ihr habt für das nächste Schulfest die Aufgabe übertragen bekommen, euch um die Getränkeversorgung zu kümmern. Wie viel Liter wird wohl jeder Gast im Schnitt trinken? Wie viele Gäste erwartet ihr? Wie viel müsst ihr einkaufen? Nehmt vernünftige Werte an.*
>
> *Was passiert nun, wenn mehr Gäste kommen als erwartet? Wie viel bleibt für jeden übrig? Spielt verschiedene Gästezahlen durch und haltet eure Ergebnisse systematisch fest. Stellt Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Gästezahl und Getränkemenge pro Gast auf.*
>
> (aus Büchter & Leuders, 2005, S. 121)

Abbildung 6: Umgestaltete Fassung 2

In dieser Fassung müssen die Lernenden selbst ein passendes Modell erfinden und prüfen, ob es für die Situation tragfähig ist. Die Autoren betonen, dass nicht jede Lernendengruppe alle zentralen mathematischen Eigenschaften und Strukturen der Aufgabe herausarbeiten wird, allerdings werden genügend Einsichten gewonnen, um in einer späteren Sammlung der Ergebnisse erste Einblicke in die Struktur antiproportionaler Modelle zu erhalten (vgl. ebd.).

Büchter und Leuders (2005) geben zur gleichen Vorlage noch zwei weitere mögliche Fassungen der Aufgabenstellung mit zunehmender Offenheit an (nachzulesen ebd., S. 122). Auch hinsichtlich anderer Kriterien der obigen Checkliste (siehe Kasten 2) sind weitere Variationen der Aufgabe denkbar. Die hier angegebenen Beispiele sollen vor allem verdeutlichen, dass die Suche nach realitätsbezogenen Schulbuchaufgaben mit entsprechendem Potenzial ein gewinnbringender Ansatz zur Entwicklung von Lernaufgaben sein kann und exemplarisch aufzeigen, welche möglichen „Stellschrauben" sich für eine ertragreiche Überarbeitung ergeben können.

Erkundungen in innermathematischen Situationen – Aufgaben des Typs „Finde möglichst viele …" entwickeln

Das Entdecken und Erkunden von Mathematik ist nicht nur in außermathematischen Situationen möglich. Es gibt auch vielfältige innermathematische Anlässe, aus denen sich Lerngelegenheiten mit hohem Problemgehalt und großem Differenzierungsvermögen entwickeln lassen. Eine diesbezüglich sehr lohnenswerte Möglichkeit findet sich im *ergebnisoffenen Ansatz*, die in der japanischen bzw. englischsprachigen Literatur vor allem von Becker und Shimada vertreten wird. In ihrem Buch „The Open-Ended Approach – A New Proposal for Teaching Mathematics" (1997) werden einige Aufgaben zur ergebnisoffenen

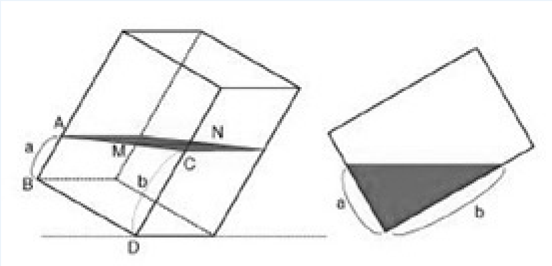
Erkundung vorgestellt, die Planung entsprechender Unterrichteinheiten skizziert und mit Erfahrungsberichten unterfüttert.

Eines der dargestellten offenen Probleme (das sogenannte „Water-Flask-Problem“) ist in Abbildung 7 dargestellt.

Abbildung 7:
Das Water-Flask-Problem

Ein transparenter Quader ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wird er auf einen flachen Tisch gestellt und so gekippt, dass eine Kante seiner Grundfläche fest auf dem Tisch steht, werden verschiedene geometrische Formen aus den Quaderseiten und der Wasseroberfläche erzeugt. Die Form und die Größe verschiedener Teile ändern sich, wenn das Gefäß gekippt wird.

Finde möglichst viele Beziehungen zwischen den Teilen heraus und schreibe sie auf.



(übersetzt aus Becker & Shimada, 1997, S. 10).

Aus dieser einfach nachvollziehbaren und zugänglichen Situation ergibt sich ein reicher Schatz an Erkundungen von Beziehungen und Zusammenhängen auf unterschiedlichen Niveaus und es kommt zu Entdeckungen, die auch für die Lehrkräfte überraschend sind. Zur Unterstützung bietet es sich hier an, den Lernenden einen Quader aus Plexiglas und etwas Wasser zum Experimentieren zur Verfügung zu stellen.

Für die Konstruktion von Aufgaben zur ergebnisoffenen Erkundung sind ebenfalls die in Kasten 2 formulierten Kriterien eine hilfreiche Orientierung. Ein wesentliches Kennzeichen dieses Aufgabenformats ist allerdings, dass es nicht darum geht (mehr oder weniger) konkrete, vorgegebene Fragestellungen abzuarbeiten, sondern darum, *möglichst viel* über ein mathematisches Objekt herauszufinden. Aus den gesammelten Ergebnissen und Einsichten werden schließlich allgemeine Zusammenhänge, Eigenschaften, Beziehungen usw. hergeleitet (vgl. Becker & Shimada, 1997).

Für Lernaufgaben des Typs „Finde möglichst viele …“ gibt es verschiedene Ansätze und Umsetzungsmöglichkeiten. Einige Beispiele und mögliche Kategorisierungen werden auch von Büchter und Leuders (2005) vorgestellt.

Um Problemstellungen dieser Art selbst zu entwickeln, müssen die in Kasten 2 dargestellten Kriterien der Checkliste letztlich um drei wichtige Fragen ergänzt werden (siehe Kasten 3).

Kasten 3:
Konstruktion ergebnisoffener Erkundungen des Typs „Finde möglichst viele …“

- Welches mathematische Objekt (Körper, Figur, Funktionsterm, Zahlen …) soll im Zentrum stehen?
- Wovon soll möglichst viel gefunden werden (Beziehungen, Merkmale, Eigenschaften, Muster …)?
- Ist das Beispiel reichhaltig genug, um *bedeutsame* Begriffe, Zusammenhänge usw. zu entdecken?

Gerade die ergebnisoffenen Erkundungen in innermathematischen Situationen werden vor allem durch die Struktur des fachlichen Gegenstandes selbst getragen und ermöglichen den Lernenden einen authentischen Einblick in Prozesse mathematischer Forschung. Es werden zwei der (nach Winter 1996) für den Mathematikunterricht zentralen Grunderfahrungen verknüpft. Zum einen *„[…] mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen […]"* und zum anderen *„[…] in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben […]"* (Winter, 1996, S. 37).

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Hinweise und Anregungen sollen vor allem ein beispielhaftes Vorgehen bei der Konstruktion der beiden genannten speziellen Typen von Lernaufgaben verdeutlichen. Da es sich bei Lernaufgaben im Allgemeinen aber um ein sehr weitreichendes Aufgabenformat handelt, mit dem ganz unterschiedliche inhaltliche Zielsetzungen in den verschiedenen Kernprozessen verfolgt werden können (vgl. Abschnitt 3.3), gibt es noch viele weitere mögliche Herangehensweisen bei der Gestaltung von Unterrichtsmaterial sowie dessen Einsatz.

Da gerade im Prozess des Endeckens und Erkundens der Initiierung aktiver Begriffsbildungsprozesse eine entscheidende Rolle zukommt, sei abschließend noch auf die Entwicklung und den Einsatz sogenannter ‚Intentionaler Probleme' hingewiesen, die Hußmann (2003) vor allem für den Unterricht in der Sekundarstufe II realisiert. Dabei handelt es sich um authentische und sinnstiftende Problemsituationen, die auf die Entwicklung neuer Begriffe und Verfahren abzielen und von Lernendengruppen selbstständig in eigener Organisation bearbeitet werden. Neben Offenheit, Komplexität und Realitätsnähe zeichnen sich die Situationen vor allem dadurch aus, dass sie die zu entwickelnden Begriffe als (plausible) Möglichkeit beinhalten (Hußmann, 2009). In Abgrenzung zu eng geführten Aufgabenstellungen mit einer Reihe strukturierender Einzelfragen, geht es hier gerade nicht um eine kleinschrittige Annäherung an einen neuen Begriff. Ziel ist es vielmehr innerhalb einer komplexen Situation authentische Fragestellungen aufzuwerfen, die eine echte Auseinandersetzung mit der Problemsituation auf inhaltlicher Ebene und die Entwicklung neuer Begriffe und Verfahren erfordern. Durch die Bearbeitung strukturgleicher Situationen, deren zentrale Bestandteile verschiedene Ausprägungen einer begrifflichen Kernidee sind (vgl. Hußmann, 2009), wird aktive mathematische Theoriebildung auf verschiedenen Ebenen und unter unterschiedlichen individuellen Zugängen initiiert. Die Lernenden arbeiten dabei in Gruppen zusammen, halten ihre Ergebnisse in Forschungsheften fest, entwickeln eigene Beispiele und erarbeiten entweder eigenständig oder mit Hilfe der Lehrperson entsprechendes Übungsmaterial. Dabei bildet vor allem „[…] die Struktur der Beispiele und Übungen […] den Umfang und Inhalt des jeweiligen Netzes von Begriffen und Verfahren ab, das notwendigerweise entwickelt werden muss zur erfolgreichen Bearbeitung der Problemsituation" (Hußmann, 2009, S. 70).

Der Einsatz Intentionaler Probleme führt hinsichtlich der Selbstständigkeit der Lernenden und der Aktivität bei der Gestaltung des eigenen Lernprozesses noch deutlich weiter als in den oben aufgeführten Beispielen zur außer- und innermathematischen Erkundung und ist daher besonders für höhere Klassenstufen geeignet. Gleichwohl bietet diese Idee aber auch fruchtbare Ansätze für die Arbeit in der Sekundarstufe I. Je mehr Gelegenheiten Schülerinnen und Schülern zur vorstellungsorientierten und selbstständigen Begriffsentwicklung geboten werden, umso selbstverständlicher und motivierender ist es letztlich auch, mathematische Theoriebildung (im Sinne „echter Forschung") aktiv und eigenverantwortlich mitzugestalten.

Zum Weiterlesen

Für weitere praktische Anregungen und mögliche Anleitungen zur Gestaltung unterschiedlicher Typen von Lernaufgaben empfiehlt sich vor allem das entsprechende Kapitel folgenden Praxisbuches, aus dem einige Beispiele des vorliegenden Beitrags entlehnt sind und worauf bereits häufig verwiesen wurde:

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Ausgearbeitete Lernumgebungen, die mit methodischen Anregungen und Erfahrungsberichten ergänzt sind, finden sich vor allem in folgenden Quellen:

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended-Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics.* Reston(Virginia). Mcgraw-Hill.
Hengartner, E., Hirt, U. & Wälti, B. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Zug: Klett.
Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen in der Sekundarstufe II – Theorie und Praxis des Selbstlernen in der Sekundarstufe II.* Berlin: Cornelsen.

Literatur

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 71–74). Münster: wtm.
Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended-Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston (Virginia). Mcgraw-Hill.
Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die „gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 139–147). Münster: wtm.
Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Hengartner, E., Hirt, U. & Wälti, B. (2006). Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett.
Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen in der Sekundarstufe II – Theorie und Praxis des Selbstlernen in der Sekundarstufe II*. Berlin: Cornelsen.
Hußmann, S. (2009). Mathematik selbst erfinden. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 62–73). Berlin: Cornelsen.
Hußmann, S. & Prediger, P. (2007). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49*(17), 1–8.
Krogoll, T. (1998). Lernaufgaben. Gestalten von Lernen und Arbeiten. In H. Holz, J. Koch, D. Schemme, E. Witzgall et al. (Hrsg.), *Lern- und Arbeitsaufgabenkonzepte in Theorie und Praxis* (S. 148–164). Bielefeld: Bertelsmann.
Leisen, J. (2006). Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *59*(5), 260–266.
Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (1998). *Das Zahlenbuch. Lehrerband*. Leipzig: Klett.
Reusser, K. (2011). Von der Unterrichtsforschung zur Unterrichtsentwicklung – Probleme, Strategien, Werkzeuge. In W. Einsiedler (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und didaktische Entwicklungsforschung* (S. 11–40). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Thonhauser, J. (2008): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen: Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *61*, 37–46.

Wittmann E. Ch. & Müller, G. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett.

Wittmann E. Ch. & Müller, G. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, *6*, 3–7.

4 Nachhaltige Sicherung

4.1 Bedeutung und Merkmale des nachhaltigen Sicherns

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln erläutert wurde, wie die Kernprozesse des Erkundens und Übens wirkungsvoll gestaltet werden können, soll nun dem Kernprozess des nachhaltigen Sicherns Beachtung geschenkt werden. Nachdem in der mathematikdidaktischen Forschung und Diskussion den Phasen des Erkundens und Übens sehr viel Aufmerksamkeit geschenkt wurde, wird zunehmend darüber diskutiert, wie die erkundeten Inhalte nachhaltig systematisiert und gesichert werden können (vgl. Bruder, Büchter & Leuders, 2008; Prediger & Barzel, Leuders & Hußmann, 2011; Barzel, Holzäpfel & Leuders, 2011; Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger, 2012a; Prediger & Wittmann, 2014).

Warum ist Sicherung und Systematisierung wichtig?

In der Phase des Erkundens machen die Lernenden viele neue Erfahrungen und bilden mannigfaltige und individuelle neue Erkenntnisse zu mathematischen Begriffen und Verfahren aus, die meist aufgabenbezogen und ungeordnet in den Schülerdokumenten vermerkt sind. Diese werden in dieser Phase nicht bewusst reflektiert und können dementsprechend nicht miteinander vernetzt und in das fachliche Vorwissen eingeordnet werden. Auch eine Regularisierung hin zur Formulierung fertiger Mathematik hat in dieser Phase noch nicht stattgefunden. Deshalb besteht eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts im Anschluss des Erkundens darin, in einem eigenständigen Kernprozess die neuen Ideen zu systematisieren und nachhaltig zu sichern, damit die Lernenden diese als konsolidiertes Wissen langfristig nutzen können und somit eine Anschlussfähigkeit im Hinblick auf nachfolgende Lerninhalte gewährleistet wird.

Folgende Aspekte bzw. Bedarfe sind dabei für die Nachhaltigkeit und Anschlussfähigkeit in der Phase des Systematisierens und Sicherns für Prediger et al. (2011, S. 2) zentral:

- „Erfahrungen werden nur dann zu Wissen und Können, wenn diese bewusst gemacht und konsolidiert werden. Denn reines Entdecken ohne Sammeln und Systematisieren der Ergebnisse hat selten nachhaltige Erfolge. (*Reflexionsbedarf*)
- Individuelle Nacherfindungen bilden einen wichtigen Schritt im Lernprozess – aber sie führen nicht automatisch auf die konventionellen Begriffe und Sätze der Mathematik (Gallin & Ruf, 1990, nennen diesen Schritt der Konfrontation mit dem regulären mathematischen Wissen das Regularisieren). (*Regularisierungsbedarf*)
- Allein einzelne Kenntnisse ohne eine systematisierende Einordnung führen nur auf isoliertes bruchstückhaftes Wissen. (*Vernetzungsbedarf*)
- Zum Lernen gehört das Festhalten, vor allem das Verschriftlichen. Dabei werden die Gedanken präzisiert und später kann man auf das Wissen zurückgreifen. (*Dokumentationsbedarf*)."

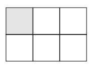
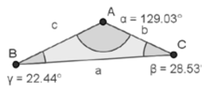
Werden diese Aspekte bei der Planung und Durchführung des Systematisierens und Sicherns beachtet, werden die während des Erkundens neu gewonnenen Ideen konsolidiert, auf die die Lernenden langfristig zurückgreifen können.

So kann auch die von Meyer (2004) geforderte inhaltliche Klarheit des Unterrichts gestützt werden, da in der Phase des Systematisierens und Sicherns eine Verständigung darüber erzielt wird, „… was als gemeinsamer Wissens- und Könnensbesitz der Klasse gelten kann, worauf in späteren Unterrichtsphasen zurückgegriffen und was auch zum Gegenstand von Leistungsüberprüfungen gemacht werden kann" (Meyer, 2004, S. 59). Auf diese Art und Weise wird eine gewisse Verbindlichkeit hergestellt, auf die vor allem leistungsschwächere Lernende angewiesen sind.

Was soll gesichert werden und welche Überlegungen sind nötig?

Eine in der Schulpraxis bewährte und häufig praktizierte Form der Sicherung ist das Führen eines schuljahresübergreifenden Merkhefts oder ein selbst angelegter Wissensspeicher (Brückner, 1978, Prediger et al., 2011), in dem die im Unterricht genannten oder erarbeiteten Definitionen, Sätze und konventionelle Regeln (zusammen mit Beispielen) festgehalten werden.

Tabelle 1: Arten und Facetten von Wissen (aus Prediger et al., 2011, S. 3)

Welche Wissenselemente müssen gesichert werden?				
Was daran ? (Facette des Wissens) **Was?** (Art des Wissens)	**Explizite Formulierungen**	**Konkretisierung und Abgrenzung**	**Bedeutungen und Vernetzung**	**Konventionelle Festlegung**
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte *Zahlen, Operationen*	Definitionen *Definition eines Bruchs*	Beispiele / Gegenbeispiele *$\frac{2}{3}$ ist ein Bruch, 2 auch, aber 2 ist sogar natürlich*	Vorstellungen / Darstellungen *Bruch als Teil eines Ganzen, so dargestellt:* $\frac{1}{6}$ 	Fachwörter *Namen wie Nenner, Zähler* Bezeichnungen *rechte Winkel markiert man durch einen Punkt*
Zusammenhänge *Winkelsummensatz in Dreieck*	Satz *Formulierung des Winkelsummensatzes*	Beispiele / Gegenbeispiele 	(anschauliche) Begründung / Beweis 	Namen von Sätzen *„Winkelsummensatz“*, Bezeichnung *Winkel und Seiten im Dreieck* konventionelle Regeln *Punkt vor Strich*
Prozedurales Wissen				
Mathematische Verfahren, Algorithmen *Graphen zeichnen, Brüche addieren, Dreisatz im Kopf*	Anleitung *Wie addiert man ungleichnamige Brüche in drei Schritten?*	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle evtl. Wissen zu typ. Fehlern *Beim Zeichnen von Graphen muss man auf die Skalierung der Achsen achten.*	Vorstellung / Begründung als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten *Man stellt sich die Additionsschritte von Brüchen in Streifenbildern vor.*	Vereinbarungen *Beim Zeichnen von Funktionsgraphen wird die x-Achse immer als die horizontale Achse genommen.*
Handwerkliche Verfahren *Winkel zeichnen Taschenrechner Heftführung*	Anleitung *So zeichnet man mit dem Geodreieck einen Winkel von 70°…*	Umsetzen der Anleitung, Bedingungen der Anwendbarkeit,spezifische Kniffe, Fehlerwissen *Achte beim Zeichnen von Winkeln über 180° auf …*	(keine konzeptuellen Gehalte, nur Handwerk, daher keine Bedeutungen)	Vereinbarungen *Im Heft immer Datum angeben* *Die Taschenrechnertaste „=“ heißt ENTER*
Metakognitives Wissen				
Strategien des Problemlösens	…	…		
Schritte beim Modellieren …	…			

Zentral für die Nachhaltigkeit des erworbenen Wissens ist der Grad der Schülerbeteiligung bei der Systematisierung und Sicherung dieser Elemente (vgl. Prediger et al., 2011). Nur durch spezifische Aneignungshandlungen kann das Wissen zu eigenem individuell verfügbaren Wissen transformiert werden.

Demzufolge schließt sich die Frage an, welche Wissenselemente die Lernenden, bezogen auf die verschiedensten Lerngegenstände, nachhaltig zur Verfügung haben sollten und welche Elemente davon mit welchen Aneignungshandlungen in das Merkheft oder in den Wissensspeicher aufgenommen werden sollten (vgl. Bruder et al., 2008, S. 10).

Prediger et al. (2011) unterschieden bei Wissenselementen, die gesichert werden müssen, zwischen verschiedenen Arten und Facetten von Wissen, die in Tabelle 1 (verkürzt übernommen aus ebd., S. 3) dargestellt sind. Neben dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen sollte auch das metakognitive Wissen, das die Lernenden als Hintergrundwissen für bewusstes Vorgehen lernen, gesichert werden. Dies können z.B. Problemlösestrategien oder Modellierungsschritte sein (vgl. ebd., S. 4).

Die Tabelle 1 zeigt, wie vielschichtig allein die inhaltlichen Überlegungen zur geeigneten Auswahl zu sichernder Wissenselemente sein können. Zudem stellt sich die Frage, wie die Sicherung und Systematisierung am besten umgesetzt werden kann. Mit welchen Aneignungshandlungen sollten die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen eigenständig festhalten? Wann sind konkrete Vorgaben nötig? Welche sinnvollen „Mittelwege" zwischen reinem Nachvollziehen und vollständigem Selbstfinden gibt es? In diesem Spannungsfeld zwischen „möglichst einheitlicher Sicherung" einerseits, was vergleichsweise viele Vorgaben erfordert und der Aktivierung der Schülerinnen und Schüler andererseits, gilt es eine fruchtbare Balance zu finden. Unter dem Punkt „Do-it-yourself" werden Anregungen und Hilfestellungen zur konkreten Gestaltung der Phase des Systematisierens und Sicherns und Möglichkeiten der Materialentwicklung vorgestellt.

4.2 Bedeutung für den Ganztag

Im Ganztagsbetrieb verbringen die Lernenden im Gegensatz zur Halbtagsschule deutlich mehr Zeit in ihrem schulischen Umfeld. Das individuelle Lernen findet zunehmend im Schulalltag im Rahmen des Fachunterrichts oder in den entsprechenden „Lernzeiten" mit wachsender Eigenverantwortung seitens der Lernenden statt. Demzufolge ist es im Ganztagsbetrieb besonders wichtig, einen „hohen Anteil echter Lernzeit" (vgl. Meyer. 2004, S. 39) zu erreichen und die zur Verfügung stehende Zeit möglichst effektiv zu nutzen.

Je nachdem, wie die Ganztagsschulen ihre Lernzeiten konzipieren, ist nicht immer gewährleistet, dass diese durch einen Mathematiklehrer betreut werden. Dies stellt eine besondere Herausforderung an die Planung des Mathematiklehrers, wenn die Phase des Systematisierens und Sichern von Lerninhalten nicht nur im Fachunterricht, sondern auch in den Lernzeiten stattfinden soll.

Um die Lernzeiten auch für den Kernprozess des Systematisierens und Sicherns produktiv zu nutzen, bietet es sich an, das Speichern des Wissens mit Hilfe von ordnenden Aufgaben und vorstrukturierten Arbeitsblättern, dem so genannten „Wissensspeicher" (vgl. Prediger et al., 2011), zu unterstützen, so dass die zentralen Aspekte und Facetten des Wissens individuell oder in Kleingruppen reflektiert, vernetzt, konventionell festgelegt und so im Wissensspeicher dokumentiert werden können. Ziel dabei ist es, die im Unterricht oder Lernzeiten gemachten Erfahrungen und entwickelten Erkenntnisse nachhaltig über die Schuljahres- und Themengrenzen hinaus zu sichern.

Abschließend können die Ergebnisse im Unterricht gemeinsam validiert und reflektiert werden. Die individuellen Wissensspeicherseiten können anschließend an einem zentralen Ort in der Schule aufbewahrt werden, so dass die Lernenden jederzeit darauf zugreifen können.

4.3 Beispiele

Nach einer entsprechenden Erkundungsphase werden die Erfahrungen und Entdeckungen in Form von ordnenden Aufgaben systematisiert und im Wissensspeicher gesichert. Im Folgenden wird vorgestellt, wie entsprechende Ordnenaufgaben an dem Beispiel des Lerngegenstands „Konstruktion von Dreiecken" aussehen können. Die Beispiele, die im Folgenden vorgestellt werden, stammen alle aus der „mathewerkstatt", einem Schulbuch für die Sekundarstufe I. Dieses Buch ist eines der Ergebnisse des Projekts „KOSIMA – Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen".

In den vorangegangen Erkundenaufgaben überlegen die Lernenden, wie man Karten für Landschaften mit Hilfe von kongruenten Dreiecken erzeugt, wie man Dreiecke mit und ohne Hilfe eines dynamischen Geometriesystems zeichnet, welche Größen man benötigt, um ein Dreieck zu zeichnen und welche fehlenden Größen man zeichnerisch bestimmen kann, z.B. um Landschaften zu vermessen.

Daran schließen sich Ordnenaufgaben an (vgl. Leuders et al., 2014). Diese zeichnen sich durch folgende für eine Systematisierung und Sicherung typische Kriterien aus:

- Jede Systematisierung und Sicherung geht mit einer Aneignungshandlung einher, hier das *aktive Nachvollziehen* unterschiedlicher Konstruktionsverfahren und des *Ordnens* der Schritte einer Konstruktionsbeschreibung.
- Bezeichnungen, die im Erkunden noch alltagssprachlich verwendet wurden, werden fachsprachlich eingeführt.
- Wege, die die Lernenden im Erkunden zuvor ‚erfunden' oder genutzt haben, werden systematisch zur Verfügung gestellt und so strukturiert, dass sie auf das zentrale fachliche Verfahren führen.
- Die verwendeten Beispiele sind paradigmatisch für das thematisierte Verfahren.
- Die Aufgabe bereitet die fachlich korrekte Sicherung im Wissensspeicher vor, indem vorgegebene Satzbausteine und Bilder korrekt sortiert werden müssen. Dies schließt an kontextgestützte Erfahrungen im Erkunden an.
- Ein Kontrollschritt ist der Vergleich unter den Lernenden.

Nachdem allen Lernenden transparent ist, wie eine angemessene Konstruktionsbeschreibung zu formulieren ist (exemplarisch) und welche entsprechenden Konstruktionszeichnungen zu welchem Konstruktionsschritt gehören, werden die systematisierten Ergebnisse in den vorstrukturierten Wissensspeicher (vgl. Leuders et al., 2014) übertragen. In dem Wissensspeicher werden alle wichtigen Wissenselemente zu einem Lerngegenstand aufbewahrt und langfristig festgehalten.

Gut durchdachte und vorstrukturierte Materialien, wie der hier vorgestellte Wissensspeicher (inklusive der damit zusammenhängenden Ordnenaufgaben), sollten nach jeder Erkundungsphase eines Lerngegenstands eingesetzt werden. Nur so findet eine Ritualisierung statt und der Wissensspeicher wächst im Laufe der Zeit kontinuierlich an. So entsteht ein unterstützendes Nachschlagewerk, das auch über die Schuljahresgrenzen hinweg und nach Abgabe der Schulbücher neben den Definitionen, Regeln und Merksätzen, die man häufig in den „roten Kästen" der Schulbüchern vorfindet, auch weitere zentrale Wissenselemente wie Darstellungen, Anwendungen in Situationen und Kontexten, Gegenbeispiele, u.v.m. enthält.

Neben der Funktion als Nachschlagewerk hat die Arbeit mit dem Wissensspeicher den Vorteil, dass den Lernenden zu jedem Zeitpunkt transparent ist, wo sich die Klasse inhaltlich befindet und welche Lerninhalte bereits vorausgesetzt werden.

Bei der Bearbeitung des vorstrukturierten Wissensspeichers in der Klasse bietet sich die Ich-Du-Wir-Methode (vgl. Mathewerkstatt, Handreichung Klasse 5) an. Nachdem in der Ich-Phase jeder Lernende für sich die entsprechende Ordnenaufgabe bearbeitet hat, findet in der Wir-Phase ein Vergleich der individuellen Bearbeitung mit dem Partner oder einer (Klein-)Gruppe statt. Diese beiden Phasen können z.B. gut in den Lernzeiten durchgeführt werden. In der Wir-Phase werden die Ergebnisse im Plenum vorgestellt und die Klasse einigt sich auf ein Ergebnis, das anschließend auf der entsprechenden Wissensspeicherseite festgehalten wird. Die Lehrkraft nimmt in diesen Phasen eine moderierende und kontrollierende Funktion ein, damit richtige Ergebnisse im Wissensspeicher notiert werden.

4.4 Do-it-yourself

Nachdem in den ersten drei Abschnitten bereits erläutert wurde,

- warum das Sichern und Systematisieren ein wichtiger Kernprozess innerhalb des mathematischen Lernprozesses ist,
- welche Rolle der Ganztag dabei spielt und wie die Ganztagsangebote effektiv zum nachhaltigen Sichern und Systematisieren genutzt werden können
- und Beispiele für entsprechende Ordnenaufgaben und Wissensspeicher gegeben wurden,

soll nun der Einsatz im Mathematik- und Ganztagsunterricht erläutert werden.

Prediger et al. (2011) geben in ihrem Artikel eine sinnvolle Strukturierungshilfe zur Konzipierung eines vorstrukturierten Wissensspeichers und den damit zusammenhängenden Ordnenaufgaben und teilen den Prozess in vier zentrale Schritte ein.

Im ersten Schritt wird festgelegt, welche Wissenselemente zu dem ausgewählten Lerngegenstand gesichert werden sollen und dabei überprüft, welche Facetten und Arten des Wissens in der entsprechenden Phase des Lernprozesses relevant und vor allem zentral sind (vgl. Prediger et al., 2011). Hier bietet sich die Erstellung eines Begriffsnetzes an, in dem alle wichtigen Definitionen, Sätze, Regeln, Konventionen, Darstellungen, Situationen bzw. Kontexte und auch Konkretisierungen und Abgrenzungen integriert sind. Auf Basis dieses Begriffsnetzes kann ein Lernpfad erstellt werden, d.h. zu welchem Zeitpunkt welche Wissenselemente im Unterricht vermittelt werden sollen. Eine solche Erstellung hilft der Lehrkraft, den Lerngegenstand zu spezifizieren und zu strukturieren und somit die relevanten Wissenselemente festzulegen.

Ein weiterer Schritt besteht in der Überlegung, wie die Wissensspeichereinträge verschriftlicht und gestaltet werden sollen, so dass die Einträge für Lernenden langfristig nützlich sind. Soll beispielsweise der Begriff „Kongruenz" gesichert werden.

Um eine tatsächliche Aneignungshandlung zu initiieren und nicht nur den Tafelanschrieb oder roten Kasten im Buch nachzuvollziehen, gibt es verschiedene Wege:

Eine Möglichkeit wäre, dass die Lernenden selbst eine Definition erstellen. Hierbei können z.B. an Zeichnungen von kongruenten und nicht kongruenten Dreiecken den Begriff erklärt und gleichzeitig Abgrenzungswissen erzeugt werden. Alternativ stellt man Definitionen zur Verfügung (z.B. mit Hilfe von unterschiedlichen Darstellungen), die kleine Fehler enthalten. Diese Fehler müssen identifiziert und korrigiert werden, um das fertige Ergebnis in den Wissensspeicher einzutragen.

Der Vorteil beim bloßen Nachvollziehen fertiger Regeln und Sätzen besteht darin, dass jeder Lernende den gleichen Eintrag im Heft stehen hat. Nachteilig ist die niedrige Lernendenaktivität und die Unklarheit darüber, ob die Lernenden den Hefteintrag mit tragfähigen Vorstellungen verbinden und nicht nur rein aufgabenbezogenes Wissen besitzen, das nach der Wissensabfrage (z.B. in Form einer Klassenarbeit) wieder verloren geht.

Beim Aneignen ist die Aktivität der Lernenden sehr hoch und das so gesicherte Wissen ist nachhaltiger gesichert als beim bloßen Nachvollziehen, allerdings können die Ergebnisse unterschiedlich sein. Da durch die Lehrkraft sicher gestellt werden sollte, dass jeder Lernende einen richtigen Eintrag im Heft hat, damit sich keine Fehlvorstellungen ausbilden können, müsste sich die Lehrkraft mit jedem Hefteintrag auseinandersetzen. Das so gesicherte Wissen ist zwar sehr nachhaltig, allerdings kostet diese Auseinandersetzung viel Zeit. Dementsprechend sollte das konsequente Selbsterfinden von Regeln, Sätzen, usw. nur gelegentlich eingesetzt werden. Der alternative Weg hingegen ist deutlich einfacher zu korrigieren, da er mit vorgegebenen Elementen arbeitet und nur die Variationen kontrolliert werden müssen, was die Schülerinnen und Schüler vielfach in Partnerarbeit leisten können. Weitere alternative Wege sind in Abbildung 1 dargestellt, die sich im Grad und die Art der Vorstrukturierung unterscheiden, welche wiederum von der Wissensart abhängt.

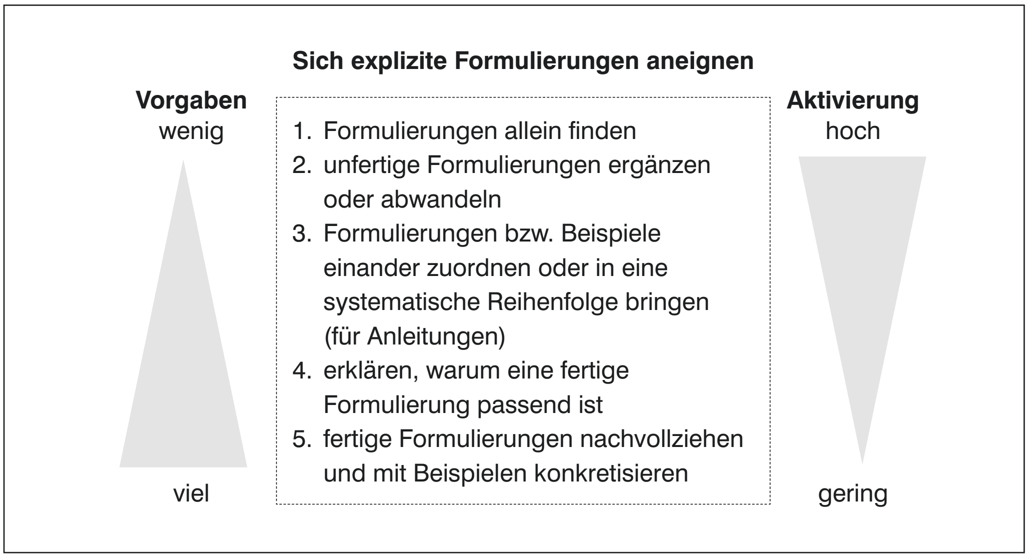


Abbildung 1: Mögliche Aneignungshandlungen zum Formulieren von Konzepten und Zusammenhängen am Beispiel der Wissensfacette „explizite Formulierungen" (aus Prediger et al., 2011, S. 7)

Bezogen auf das oben beschriebene Beispiel, in dem die Lernenden den Begriff „Kongruenz" definieren sollen, könnte ein möglicher Weg folgendermaßen aussehen: Die Lernenden erhalten vorstrukturierte Materialien in Form von mehreren Dreiecken, an denen sie überprüfen sollen, welche Dreiecke deckungsgleich sind. Fiktive Schüleräußerungen geben zusätzliche Hinweise. Die Aneignungshandlung, die hier maßgeblich ist, ist die des Identifizierens und Ordnens. Nach einem Vergleich unter den Lernenden wird das konsolidierte Wissen in den Wissensspeicher eingetragen. Als eine Möglichkeit können in dem vorstrukturierten Wissensspeicher die untersuchten Dreiecke schon vorhanden sein, die dann jeweils beschriftet und sortiert werden müssen.

Wie kann ein Wissensspeicher konkret gestaltet werden?

Der Wissensspeicher sollte möglichst übersichtlich und strukturiert gestaltet sein, damit die Lernenden auch nach der Unterrichtseinheit schnell auf das gespeicherte Wissen zurückgreifen können. Für die Erstellung eines Wissensspeichers innerhalb eines Fachkollegiums empfiehlt es sich, ein einheitliches Template zu verwenden und Absprachen zum Umgang und Erstellung des Wissensspeichers so zu treffen, dass auch bei einem Wechsel der Mathematiklehrkraft der Wissensspeicher nicht nur weiterhin und fortlaufend eingesetzt, sondern auch möglichst gleichförmig erstellt und verwendet wird. Für das Projekt Ganz In wurde seitens der Fachdidaktik Mathematik ein solches Template mit entsprechenden Hinweisen erstellt und von den Ganz-In-Schulen verwendet.

Nachdem bereits erläutert wurde, welche Planungsschritte man bei der Erstellung von Ordnenaufgaben und eines Wissensspeichers beachtet werden sollten, wird nun an Beispielen dargelegt, wie ein Wissensspeicher konkret gestaltet werden kann.

Zu Beginn sollten die zu lernenden Inhalte und die entsprechenden zu sichernden Wissenselemente konkret festgelegt und formuliert werden. Besonders geeignet sind hierfür Formulierungen, die sich direkt auf den einzelnen Lernenden beziehen – z.B. in der Form „So (mache) ich …" („So berechne ich mit einem Term das Kapital", „So bestimmt man weitere Werte in einer Tabelle", usw.). So ist dem Lernenden in jeder Bearbeitungsphase transparent, welches Wissenselement bzw. welche Teilfertigkeit gerade gesichert werden soll. Dies leistet einen erheblichen Beitrag dazu, den individuellen Lernprozess möglichst nachhaltig zu gestalten.

Anschließend sollte man sich für jedes Wissenselement überlegen, welche Form der Aneignung zwischen Selbsterfinden und Nachvollziehen dafür besonders geeignet ist (vgl. Abb. 1). Dabei findet eine persönliche Abwägung nach dem Prinzip „so viele Vorgaben wie nötig" und „so viele Aktivitäten wie möglich" statt.

Sichern von expliziten Formulierungen

Sollen zum Beispiel explizite Formulierungen wie Definitionen, Sätze, Anleitungen bei mathematischen oder handwerklichen Verfahren, etc. gesichert werden (vgl. Tab. 1), kann eine sinnvolle Aneignungshandlung das Ergänzen oder Abwandeln von unfertigen Formulierungen sein (vgl. Abb. 1). Am Beispiel des Lerngegenstands „Konstruktion von Dreiecken" kann dies bedeuten, dass sie mit Hilfe von vorgefertigten Textbausteinen eine eigene Konstruktionsbeschreibung anfertigen.

Konkretisierung und Abgrenzung

Für die Konkretisierung und Abgrenzung solcher Konzepte und Verfahren (vgl. Tab. 1) kann eine sinnvolle Aneignungshandlung das Finden / Erfinden von Beispielen oder Gegenbeispielen sein und gleichzeitig zu begründen, warum es sich um ein Gegenbeispiel bzw. um ein passendes Beispiel handelt.

Bedeutungen und Vernetzungen

Um die Bedeutungen und die Vernetzungen eines Lerngegenstands zu sichern (vgl. Tab. 1), können eigene Bilder (z.B. bei Negativen Zahlen, Brüchen, etc.), Darstellungen (vor allem bei funktionalen Zusammenhängen) oder Situationen (z.B. Kontexte) von den Lernenden gefunden werden, mit denen sich der formale Zusammenhang erklären oder interpretieren lässt. Zum Beispiel können die Lernenden beim Lerngegenstand „Negative Zahlen" dazu aufgefordert werden, eine Rechnung der Form $a-b$ ($b>a$) mit Hilfe des Kontextes Guthaben und Schulden zu erklären.

Die Rechnung 4-9=____ kann man mit Guthaben und Schulden erklären: ____

____

Abbildung 2: Beispiel für einen Wissensspeicher zum Gegenstand negative Zahlen (vgl. Hußmann, 2013)

Konventionelle Festlegungen

Das Sichern von Konventionen mit möglichst wenigen Vorgaben und eine hohen Eigenaktivität gestaltet sich in einigen Fällen eher als schwierig. Hier bietet sich oftmals das Ergänzen oder Abwandeln von unfertigen Formulierungen an (vgl. Abb. 3). Um den Lernenden den individuellen Sinn bestimmter Konventionen nahe zu bringen, bietet sich zum Bespiel eine Reflexion der Begriffe an: „So nennt man es, erkläre warum der Name passt“ oder ähnliche Fragestellungen (vgl. Prediger et al., 2011).

Wissensspeicher **Dreiecke bezeichnen und konstruieren**

So bezeichnet man Dreiecke

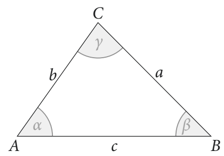
Die **Eckpunkte** heißen z. B. *A*, *B* und *C*.

Sie werden _____________ dem Uhrzeigersinn angetragen.

Die **Winkel** an den Eckpunkten heißen ____________________.

_________________________ von den Punkten *A*, *B* und *C* sind die **Strecken:**

***a*, *b* und *c*.** Sie werden in der Regel in Kleinbuchstaben geschrieben.



© 2013 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin

Abbildung 3: Bespiel für einen Wissensspeicher zum Gegenstand „Konstruktion von Dreiecken“ (aus Leuders et al., 2014 , © 2013 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin)

Die Aufgaben für den Wissensspeicher müssen nicht alle selbst erfunden werden. Vielmehr bietet es sich an, bereits vorhandene Aufgaben aus dem Schulbuch und den Begleitmaterialien entsprechend umzuwandeln.

Wie setzt man das Sichern und Systematisieren im Unterricht um?

Nachdem feststeht, welche Wissenselemente systematisiert und gesichert werden sollen, wie der gesicherte Eintrag aussehen soll und wie die Lernenden bei der Erstellung eines Wissensspeichereintrages aktiv mitwirken können, steht abschließend die Überlegung an, mit welchen Unterrichtsformen und -methoden der Prozess des Systematisierens und Sicherns gestaltet werden soll. Welche Aneignungshandlungen können die Lernenden eigenständig bewältigen, wo ist ein Austausch mit dem Partner oder einer Kleingruppe sinnvoll oder notwendig, an welchen Stellen sollte ein Austausch mit der Klasse stattfinden und an welchen Stellen sollte die Lehrkraft moderierend oder kontrollierend tätig werden, damit richtige Ergebnisse im Wissensspeicher notiert werden (Prediger et al., 2011)? Hierfür bieten sich zum Beispiel kooperative Lernformen an.

Im folgenden Kasten sind die wichtigsten Planungsschritte mit zentralen Fragen der Umsetzung übersichtlich dargestellt:

Kasten 1: Planungsschritte der Sicherungs- und Systematisierungsphase (Ordnen) (aus Prediger et al., 2011, S. 6)

Ordnen im Unterricht: Planungsschritte

1. Welche Wissenselemente werden systematisiert und gesichert?

- Konkretisierungen (Beispiele) und Abgrenzungen (Gegenbeispiele), oder auch explizite Formulierungen (Regeln, Definitionen, Sätze, Verfahren)?
- Welche Bedeutungen und Zusammenhänge sollten explizit gesichert werden?
- Auf welche Konventionen muss man achten?

2. Wie soll der gesicherte Eintrag am Ende aussehen?

- Welche Wissensfacetten sollen explizit festgehalten werden?
- Welche Gestaltung ist für die Lernenden später nützlich? (Einsatz von Farben, verschiedene Darstellungen, Tabellenform, …)

3. Wie können Lernende bei der Erstellung des Eintrags aktiv werden? Welche „Aneignungshandlungen“ bieten sich an?

- Wie viel gebe ich vor, wie viel erarbeiten die Lernenden selbst? Was ist hier für die ausgewählten Wissenselemente möglich und wichtig?
- Wie komplex sind die expliziten Formulierungen, was können Lernende davon allein bewältigen?
- Welche Vorstellungen und Darstellungen haben die Lernenden längst entwickelt und können sie formulieren? Wo brauchen sie Unterstützung durch das Aufgabenformat (z. B. durch Zuordnen gegebener Texte oder Beispiele)?

4. Welche Unterrichtsformen und -methoden passen zu den gewählten Aneignungshandlungen?

- Was kann in Einzelarbeit erfolgen, wo ist Kommunikation mit anderen Lernenden oder der ganzen Klasse sinnvoll oder sogar erforderlich?
- Welche Schritte muss ich als Lehrkraft kontrollieren, um sicher zu gehen, dass nichts Falsches festgehalten wird?

Zum Weiterlesen

Wie bereits oben erläutert wird in der fachdidaktischen Forschung zunehmend darüber diskutiert, wie die im Unterricht erkundeten Inhalte nachhaltig gesichert werden können. Da in diesem Beitrag nur ein kleiner Teil dieser immer noch sehr aktuellen Diskussion präsentiert werden kann, sind im Folgenden ausgewählte Publikationen aufgelistet, in denen die hier im Beitrag teils erwähnten Aspekte intensiver behandelt werden.

Die ersten drei Literaturangaben geben einen guten Einblick in die Gestaltung von Unterrichtsprozessen und somit auch in die nachhaltige Sicherung von Wissenselementen.

Die weiteren beiden Angaben sind sehr praxisnahe Publikationen, die mit Hilfe vieler verschiedener Beispiele einen sehr guten Einblick geben, wie man im Mathematikunterricht nachhaltig sichern kann.

Publikationen zu Aspekten von nachhaltiger Sicherung

Barzel, B., Holzäpfel, L. & Leuders, T. (2011). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Praxisnahe Publikationen

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern, Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren, Erfolgreich unterrichten: Materialien und Konzepte,* (164), 2–9.

Prediger, S. (2003). Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts. In: *Friedrich Jahresheft: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln*, (21) 93–95.

Literatur

Barzel, B., Holzäpfel, L. & Leuders, T. (2011). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012a). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern – Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 93–96.). Münster: wtm-Verlag.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2012b). *Mathewerkstatt 5. Handreichungen mit Erläuterungen zum Konzept*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brückner, H. (1978). Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7. *Mathematik in der Schule, 16*(6), 310–316.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Ebersbach M., Van Dooren, W., Van Den Noortgate, W. & Resing, W. (2008). Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-years-olds. *Cognitive Development, 23*(2), 237–257.

Gallin, P. & Ruf, U. (1990): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze.

Hußmann, S. (2013). Raus aus den Schulden – Negative Zahlen. In B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger (Hrsg.), *Mathewerkstatt 7* (S. 47–78). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B. & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). *Mathewerkstatt 7* (S. 147–164). Berlin: Cornelsen Scriptor.

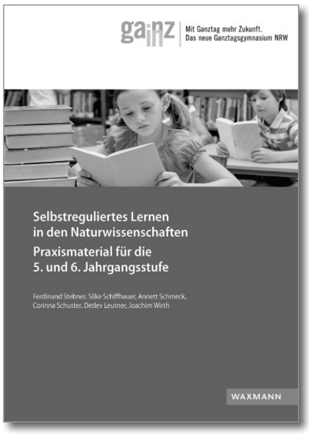
Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern, Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren, Erfolgreich unterrichten: Materialien und Konzepte,* (164), 2–9.

Prediger, S. (2003). Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts. *Friedrich Jahresheft: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln*, (21), 93–95.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2014). Verständiger Umgang mit Begriffen und Verfahren. Zentrale Grundlagen der Kompetenzaspekte Wissen-Erkennen-Beschreiben und Operieren-Berechnen. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 128–140). Seelze: Kallmeyer.

Ganz In – Materialien für die Praxis



Ferdinand Stebner, Silke Schiffauer,
Annett Schmeck, Corinna Schuster,
Detlev Leutner, Joachim Wirth

Selbstreguliertes Lernen in den Naturwissenschaften

Praxismaterial für die
5. und 6. Jahrgangsstufe

2015, 144 Seiten, 24,90 €, ISBN 978-3-8309-3286-4
E-Book: 21,99 €, ISBN 978-3-8309-8286-9

Die Autoren stellen hier ein Training vor, welches das selbstregulierte Lernen aus Sachtexten und durch Experimentieren fördert. Schülerinnen und Schüler der fünften und sechsten Jahrgangsstufe lernen in diesem Training, wie sie selbstregulative Strategien nutzen können, um Lese- und Experimentierstrategien lernförderlich anzuwenden. Das Training ist im Rahmen des Schulentwicklungsprojektes „Ganz In. Mit Ganztag mehr Zukunft. Das neue Ganztagsgymnasium NRW" (www.ganz-in.de) entstanden. Die Lernförderlichkeit und Praktikabilität des Trainings konnten mit Hilfe wissenschaftlicher Methoden im Schulalltag mehrmals erfolgreich bestätigt werden.

www.waxmann.com

Ganz In – Materialien für die Praxis

Silvia-Iris Beutel, Birte Glesemann,
Inga Wehe, Martin Burghoff, Ferdinand Stebner

Selbstständigkeit fördern, Verständigung ermöglichen, Lernwege begleiten

Erste Ergebnisse des Teilprojekts „Individuell fördern im Ganztag - Vielfältige Zugänge zum Lernen schaffen“

2015, 62 Seiten, geheftet, 19,99 €, ISBN 978-3-8309-3358-8
E-Book: 18,99 €, ISBN 978-3-8309-8358-3

In diesem Band wird die Umsetzung individueller Förderung an Ganztagsgymnasien in NRW in den Blick genommen. Neben theoretischen Überlegungen zur Bedeutung der individuellen Förderung und deren Herausforderung für die Gymnasien stehen Erfahrungen und die im Projekt begleiteten Entwicklungsschritte von sieben Projektschulen im Mittelpunkt. Die Berichte der dargestellten Schulen basieren dabei auch auf Daten aus leitfadengestützten Interviews, die mit den jeweiligen Projektbeteiligten im Sommer 2014 geführt wurden. Zudem werden Materialien, die aus den Vorhaben und Konzepterneuerungen der Schulen resultierten, erläutert und zur Anschauung hinzugefügt. Der Band will mögliche Wege und vielfältige Ansätze der individuellen Förderung aufzeigen, um Schulen darin zu ermutigen, sich auf den Weg der Erneuerung zu begeben, und um heutigen sowie künftigen Schülergenerationen sinnvolle und zukunftsbeständige Bildungserfahrungen zu ermöglichen.

www.waxmann.com